

Modèles à facteur pour la gestion du risque de crédit

Areski Cousin, Jean-Paul Laurent

Université Claude Bernard Lyon 1,
ISFA

GT Projet ANR AST&Risk - ISFA - 26 septembre et 10 octobre 2008



Introduction

- Modélisation de la dépendance pour la gestion de portefeuilles de crédit
- Motivation pour les institutions financières ?
 - Détermination du niveau minimal de fonds propres réglementaires (Approche IRB : Internal Rating Based Approach)
 - Norme comptable IAS 32 et IAS 39
 - Gestion interne et couverture de produits dérivés de crédit tels que les tranches de CDO



Introduction

- Les modèles à facteur se sont imposés pour différentes raisons :
 - Modèles de dépendance compréhensibles et simples à manipuler : les temps de défaut sont indépendants conditionnellement à un facteur aléatoire
 - Respect de l'intuition économique : la dépendance provient d'un risque systémique non mutualisable (évolution défavorable de variables macro-économiques)
 - Parcimonie des paramètres de dépendance
 - Détermination de la distribution de la perte du portefeuille de référence par des méthodes semi-analytiques.
 - Approche préconisée par le comité de Bâle II (Approche IRB) pour calculer le montant minimal de fond propre réglementaire



Introduction

- Portefeuille composé de n entités
- τ_1, \dots, τ_n temps de défaut
- $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) = (1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, 1_{\{\tau_n \leq t\}})$ les indicatrices de défaut à la date t
- M_1, \dots, M_n pertes en cas de défaut
- Processus de la **perte agrégée**

$$L_t = \sum_{i=1}^n M_i 1_{\{\tau_i \leq t\}}$$

- Capital réglementaire, Mesure de risque sur la perte agrégée à horizon 1 an
- Evaluation de produits dérivés dont les flux de capitaux sont gouvernés par le processus de la perte agrégée. Ex : $\mathbb{E}[(L_t - a)^+]$



Contents

- 1 Loi de la perte agrégée
- 2 Comparaison des risques dans les modèles à facteur
- 3 Revue des modèles à facteur et analyse de la dépendance
 - Rappels dépendance dans les extrêmes
 - Modèles à facteur basés sur des fonctions copules
 - Modèles structurels multivariés
 - Modèles Poisson multivariés



Loi de la perte dans un modèle à facteur

- En toute généralité, le calcul de la loi de la perte nécessite n intégrations numériques successives
- Succès opérationnel des modèles à facteur: complexité des calculs est directement liée à la dimension du facteur
- τ_1, \dots, τ_n conditionnellement indépendant sachant V
- Rôle prépondérant de la probabilité conditionnelle de défaut :
 - $\tilde{p}_{i,t} = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t \mid V), i = 1, \dots, n$
- Plusieurs approches dominent par leur popularité :
 - Approche FFT (Gregory et Laurent (2003))
 - Approche basée sur un algorithme récursif (Andersen, Sidenius et Basu (2003))
 - Approche basée sur des approximations de la loi conditionnelle de la perte



Approche FFT

- Inversion de la fonction caractéristique de la perte par un algorithme FFT
- Fonction caractéristique de la perte:

$$\varphi_{L_t}(u) = \mathbb{E} \left[e^{iuL_t} \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{1 \leq i \leq n} \left(1 + \tilde{p}_{i,t} \left(e^{iuM_i} - 1 \right) \right) \right].$$

- Intégration numérique (quadrature de Gauss) par rapport à la loi du facteur V
- Algorithme FFT d'inversion de transformée de Fourier



Algorithme récursif

- Cas où $M_1 = \dots = M_n = u$
- Découpage du support de la loi de la perte en une subdivision de pas constant $L = 0, u, \dots, n \times u$
- Détermination de la loi conditionnelle de la perte
- Portefeuille de taille 1 :

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(L_t^{(1)} = 0 \mid V) = 1 - \tilde{p}_{1,t} \\ \mathbb{Q}(L_t^{(1)} = 1 \mid V) = \tilde{p}_{1,t} \end{cases}$$

- Connaissant la loi conditionnelle du portefeuille de taille k , Portefeuille de taille $k + 1$:

$$\mathbb{Q}(L_t^{(k+1)} = iu \mid V) = \mathbb{Q}(L_t^{(k)} = iu \mid V)(1 - \tilde{p}_{k+1,t}) + \mathbb{Q}(L_t^{(k)} = (i-1)u \mid V)\tilde{p}_{k+1,t}$$

- Intégration numérique de la loi de la perte conditionnelle par rapport à la loi du facteur



Méthodes basées sur des approximations

- Approximation de la loi conditionnelle par une loi de Poisson, Normal Power
- Méthode d'approximation de Stein introduite dans le crédit par El Karoui et Jiao (2007)
 - Approcher la loi conditionnelle de la perte par une loi standard (Poisson ou Normale) de paramètres connus
 - Erreur d'approximation s'exprime de manière analytique



Cas d'un portefeuille homogène

- Applicable pour des portefeuilles de grande dimension
- $M_1 = \dots = M_n$: tous les noms ont même exposition au risque et même taux de recouvrement
 - La perte agrégée est gouvernée par le processus de comptage

$$N_t = \sum_{i=1}^n D_{i,t}$$

- Temps de défaut sont supposés être **échangeables**

$$(\tau_1, \dots, \tau_n) \stackrel{d}{=} (\tau_{\sigma(1)}, \dots, \tau_{\sigma(n)})$$

pour toute permutation σ

- Mêmes marginales, mêmes lois des couples, même lois jointes des sous-ensembles de même taille
- En particulier, $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) = (1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, 1_{\{\tau_n \leq t\}})$ échangeables pour tout t



Théorème de De Finetti et représentation à facteur

- $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}, \dots$ forment une suite de variables aléatoires de Bernoulli échangeables
- **Théorème de De Finetti**, il existe un unique facteur aléatoire \tilde{p}_t tel que
 - D_1, \dots, D_n soient conditionnellement indépendants sachant \tilde{p}_t
 - Si ν_t représente la loi de \tilde{p}_t , alors la perte agrégée est simplement un mélange de Binomiales :

$$\mathbb{Q}(N_t = k) = C_n^k \int_0^1 p^k (1-p)^{(n-k)} \nu_t(dp), \quad k = 0, \dots, n.$$

- Le calcul de la loi de la perte se résume à une simple intégration numérique
- **Echangeabilité au sens strict** garantit seulement l'existence d'une **mesure signée** Jaynes (1986)



Cas de portefeuille infiniment granulaire

- Portefeuille homogène de grande taille
 - $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}, \dots$ forment une suite de variables de Bernoulli échangeables
- Théorème de De Finetti : la perte unitaire (par unité d'exposition) converge vers \tilde{p}_t

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{i,t} \xrightarrow{p.s.} \tilde{p}_t \text{ as } n \rightarrow \infty$$

- Risque individuel mutualisable
- Perte unitaire d'un portefeuille homogène de grande taille peut être approchée par le facteur mélange \tilde{p}_t



Cas de portefeuille infiniment granulaire

- Si les temps de défaut sont conditionnellement indépendants sachant V , \tilde{p}_t coïncide avec la probabilité conditionnelle de défaut $\mathbb{Q}(\tau_1 \leq t | V)$
 - $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{i,t} \xrightarrow{P.S} \mathbb{E}[D_{1,t} | V] = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq t | V)$
- Bâle 2: perte agrégée approchée par la probabilité conditionnelle de défaut pour des portefeuilles de grande taille
- Approche généralisable à des portefeuilles non homogènes (Vasicek(2002), Gordy(2003)) lorsque :
 - Expositions individuelles négligeables par rapport à l'exposition totale



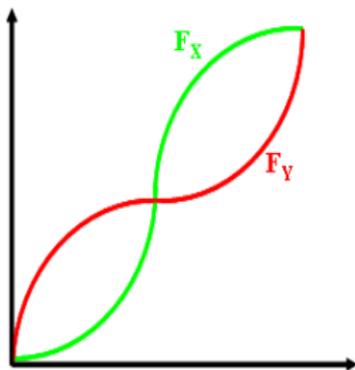
Contents

- 1 Loi de la perte agrégée
- 2 Comparaison des risques dans les modèles à facteur
- 3 Revue des modèles à facteur et analyse de la dépendance
 - Rappels dépendance dans les extrêmes
 - Modèles à facteur basés sur des fonctions copules
 - Modèles structurels multivariés
 - Modèles Poisson multivariés



Ordre convexe

- Compare le **niveau de dispersion** entre deux variables aléatoires
- **Ordre convexe**: $X \leq_{cx} Y$ if $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction convexe f
- $X \leq_{cx} Y \Rightarrow \mathbb{E}[(X - K)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - K)^+]$ for all $K \in \mathbb{R}$
- $X \leq_{cx} Y$ si $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ et F_X , la fonction de répartition de X et F_Y , la fonction de répartition de Y sont telles que :



Ordre supermodulaire

- Compare le **niveau de dépendance interne** entre deux vecteurs aléatoires
- $(X_1, \dots, X_n) \leq_{sm} (Y_1, \dots, Y_n)$ si $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] \leq \mathbb{E}[f(Y_1, \dots, Y_n)]$ pour toute fonction supermodulaire f

Definition (fonction supermodulaire)

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est **supermodulaire** si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i < j \leq n$ et $\varepsilon, \delta > 0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ \geq f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$



Revue de la littérature



Müller(1997)

Stop-loss order for portfolios of dependent risks

$$(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*) \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i D_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n M_i D_i^*$$



Bäuerle and Müller(2005)

Stochastic orders and risk measures: Consistency and bounds

$$X \leq_{cx} Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

pour toute mesure de risque convexe ρ 

Lefèvre and Utev(1996)

Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow \sum_{i=1}^n D_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n D_i^*$$



Résultats principaux

- Comparaison de deux portefeuilles de crédit
 - **Premier portefeuille** : D_1, \dots, D_n variables aléatoires de Bernoulli échangeable associées au facteur \tilde{p}
 - **Second portefeuille** : D_1^*, \dots, D_n^* variables aléatoires de Bernoulli échangeable associées au facteur \tilde{p}^*
 - Pertes : $L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_i$ and $L_t^* = \sum_{i=1}^n M_i D_i^*$

Theorem

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$

- En particulier, si $\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*$, alors:
 - $\mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+]$ pour tout $a > 0$.
 - $\rho(L_t) \leq \rho(L_t^*)$ pour toute mesure de risque convexe ρ



Résultats principaux

- Soient D_1, \dots, D_n, \dots une suite de variables de Bernoulli échangeables associée au facteur \tilde{p}
- Soient $D_1^*, \dots, D_n^*, \dots$ une suite de variables de Bernoulli échangeables associée au facteur \tilde{p}^*

Theorem (Réciproque)

$$(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* .$$



Comparaison du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur

- Pour la plupart des modèles à facteur :
 - Modèles à facteur basé sur des fonctions copules (copule gaussienne, copules archimédiennes)
 - Modèles Poisson multivariés ou à chocs communs
 - Modèles structurels multivariés
- L'augmentation du paramètre de dépendance entraîne :
 - Une diminution de la prime des tranches *equity* (tranches couvrant les premières pertes)
 - Une augmentation de la prime des tranches *senior* (tranches couvrant les dernières pertes)
 - Une augmentation des mesures de risque convexes sur la perte agrégée



Contents

- 1 Loi de la perte agrégée
- 2 Comparaison des risques dans les modèles à facteur
- 3 **Revue des modèles à facteur et analyse de la dépendance**
 - Rappels dépendance dans les extrêmes
 - Modèles à facteur basés sur des fonctions copules
 - Modèles structurels multivariés
 - Modèles Poisson multivariés



Coefficient de dépendance de queue

- X, Y deux variables aléatoires de fonction de répartition F_X et F_Y et de copule C
- Coefficient de dépendance de queue inférieure :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{Q}(X \leq F_X^{-1}(u) \mid Y \leq F_Y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

- Coefficient de dépendance de queue supérieure :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{Q}(X > F_X^{-1}(u) \mid Y > F_Y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C(u, u) + 1 - 2u}{1 - u}$$



Modèle à facteur gaussien

- La structure de dépendance des temps de défaut est régie par des variables latentes V_1, \dots, V_n telles que:
- $V_i = \rho V + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{V}_i, i = 1 \dots n$
- où $V, \bar{V}_i, i = 1 \dots n$ sont indépendantes de loi Normales centrées réduites
- Les temps de défaut sont définis par: $\tau_i = F^{-1}(\Phi(V_i)), i = 1 \dots n$
 - où F : fonction de répartition de $\tau_i, i = 1, \dots, n$
 - et Φ : fonction de répartition de V_i
- $\lambda_L = \lambda_U = 0$ lorsque $0 \leq \rho < 1$
- $\lambda_L = \lambda_U = 1$ lorsque $\rho = 1$



Modèle à facteur gaussien

- $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1 \dots n$ sont indépendantes connaissant le facteur V
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[D_i | V] = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V) = \tilde{p}_t$
- La probabilité mélange \tilde{p}_t s'écrit alors :

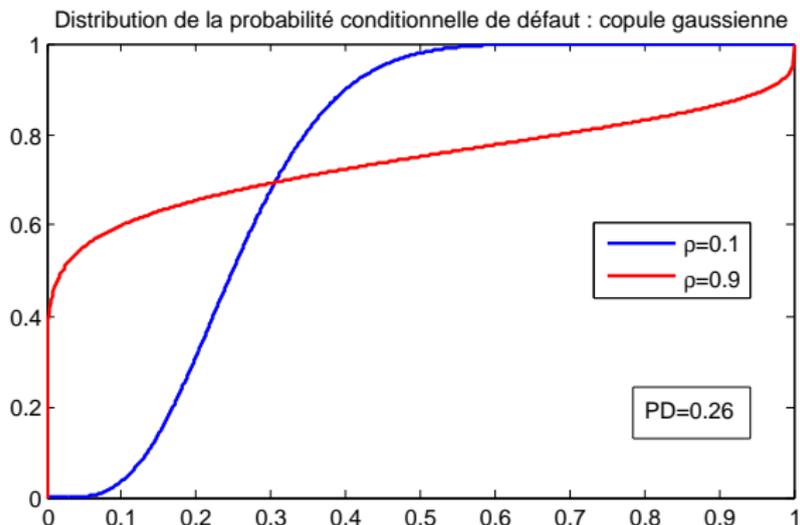
$$\tilde{p}_t = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(F(t)) - \rho V}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right).$$

Theorem

Pour tout horizon t , notons $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1 \dots n$ et $D_i^* = 1_{\{\tau_i^* \leq t\}}$, $i = 1 \dots n$ les indicatrices de défaut correspondantes à (resp.) ρ et ρ^* , alors : $\rho \leq \rho^* \Rightarrow \tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*$



Modèle à facteur gaussien



Copules archimédiennes



Schönbucher and Schubert(2001), Gregory and Laurent(2003), Madan *et al.*(2004), Friend and Rogge(2005)

- V est une variable aléatoire positive de transformée de Laplace φ^{-1}
- U_1, \dots, U_n sont des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$, indépendantes de V
- $V_i = \varphi^{-1}\left(-\frac{\ln U_i}{V}\right)$, $i = 1 \dots n$ (Marshall and Olkin (1988))
 - $\mathbb{Q}(V_1 \leq v_1, \dots, V_n \leq v_n) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_n))$
- $\tau_i = F^{-1}(V_i)$
 - F : distribution function of τ_i
- $\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{-1}(2\varphi(u))}{u} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{-1}(2x)}{\varphi^{-1}(x)}$
- $\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \varphi^{-1}(2\varphi(u))}{1 - u} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi^{-1}(2x)}{1 - \varphi^{-1}(x)}$.



Copules archimédiennes

- $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1 \dots n$ indépendantes sachant V
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{P.S} \mathbb{E}[D_i | V] = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V)$
- Probabilité conditionnelle de défaut : $\tilde{p}_t = \exp\{-\varphi(F(t)V)\}$

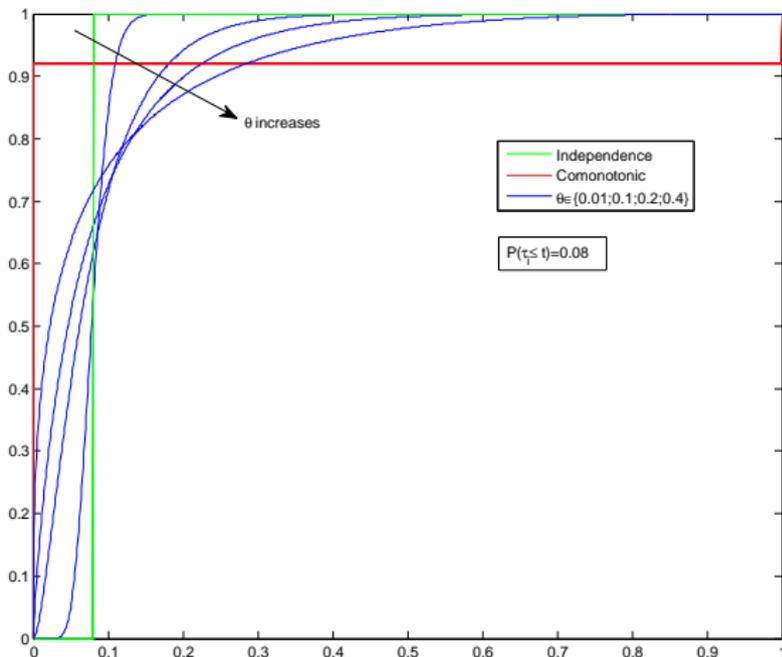
Copule	Générateur φ	Paramètre	λ_L	λ_U	ρ_K
Clayton	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$\theta \geq 0$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Gumbel	$(-\ln(t))^\theta$	$\theta \geq 1$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$1 - \frac{1}{\theta}$
Frank	$-\ln \left[\frac{1-e^{-\theta t}}{1-e^{-\theta}} \right]$	R^*	0	0	non analytique

Theorem

$$\theta \leq \theta^* \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$



Copules archimédiennes



- Exemple de la copule de Clayton
- Fonctions de répartition de la probabilité mélange ordonnées suivant l'ordre convexe



Modèles structurels



Hull, Predescu and White(2005)

- Soient n entreprises
- $V_{i,t}$, $i = 1 \dots n$ la valeur des actifs à la date t

$$V_{i,t} = \rho V_t + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{V}_{i,t}, \quad i = 1 \dots n$$

- V , \bar{V}_i , $i = 1 \dots n$ sont des Browniens standards indépendants
- Temps de défaut :

$$\tau_i = \inf\{t \in \mathbf{R}^+ | V_{i,t} \leq f(t)\}, \quad i = 1 \dots n, \quad f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ continue}$$

- $D_i = 1_{\{\tau_i \leq T\}}$, $i = 1 \dots n$ sont indépendants sachant $\sigma(V_t, t \in [0, T])$



Modèles structurels

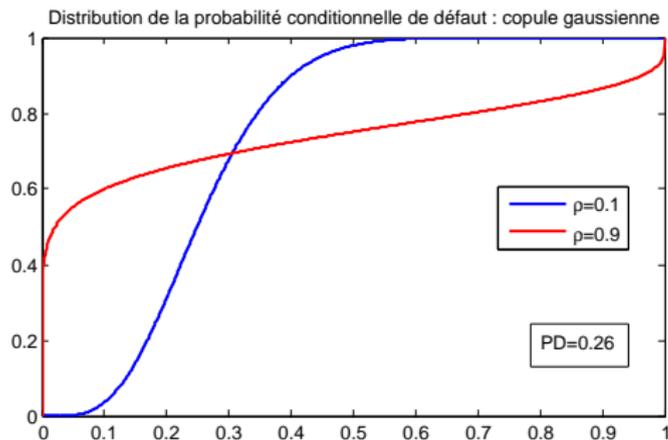
Theorem

Pour tout horizon T , soient $D_i = 1_{\{\tau_i \leq T\}}$, $i = 1 \dots n$ et
 $D_i^* = 1_{\{\tau_i^* \leq T\}}$, $i = 1 \dots n$ les indicatrices de défaut correspondants à resp. ρ
et ρ^* , alors :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$



Structural model



- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s} \tilde{p}$
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i^* \xrightarrow{p.s} \tilde{p}^*$
- Empiriquement, on constate lorsque $\rho \leq \rho^*$ que les probabilités mélanges sont ordonnées suivant l'ordre convexe : $\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*$



Modèles Poisson multivariés



Duffie(1998), Lindskog and McNeil(2003), Elouerkhaoui(2006)

- $\bar{N}_t^i, i = 1, \dots, n$ Poisson de paramètre $\bar{\lambda}$: risque idiosyncratique
- N_t Poisson de paramètre λ : risque systémique
- $(B_j^i)_{i,j}$ Bernoulli de moyenne p
- Toutes les sources de risque indépendantes
- $N_t^i = \bar{N}_t^i + \sum_{j=1}^{N_t} B_j^i, i = 1 \dots n$
- $\tau_i = \inf\{t > 0 | N_t^i > 0\}, i = 1 \dots n$
- Possibilité de défauts simultanés, risque Armageddon



Modèles Poisson multivariés

Page 1 sur 1



Modèles Poisson multivariés

- Structure de dépendance de (τ_1, \dots, τ_n) : copule de Marshall-Olkin
- $\tau_i \sim \text{Exp}(\bar{\lambda} + p\lambda)$
- $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1 \dots n$ conditionnellement indépendant sachant N_t
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[D_i | N_t] = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | N_t)$
- Probabilité conditionnelle de défaut:

$$\tilde{p}_t = 1 - (1 - p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t)$$



Modèles Poisson multivariés

- Comparaison entre modèles Poisson multivariés de paramètres $(\bar{\lambda}, \lambda, \rho)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, \rho^*)$
- Ordre supermodulaire nécessite que les lois marginales du vecteur des temps de défaut soient les mêmes : $\bar{\lambda} + \rho\lambda = \bar{\lambda}^* + \rho^*\lambda^*$
- 3 axes de comparaison:
 - $\rho = \rho^*$: $\bar{\lambda}$ v.s λ
 - $\lambda = \lambda^*$: $\bar{\lambda}$ v.s ρ
 - $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*$: λ v.s ρ

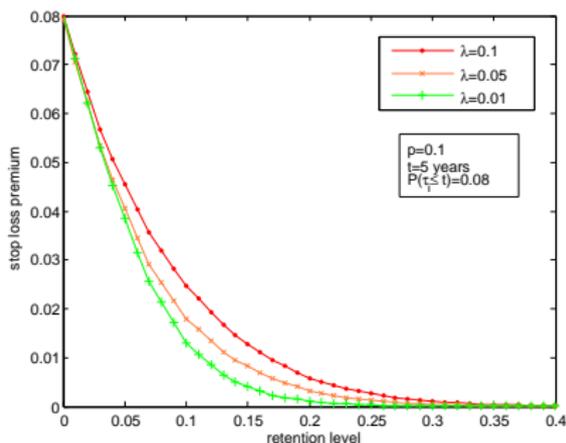


Modèles Poisson multivariés

Theorem ($p = p^*$)

Soient $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ tels que $\bar{\lambda} + p\lambda = \bar{\lambda}^* + p\lambda^*$, alors:

$$\lambda \leq \lambda^*, \bar{\lambda} \geq \bar{\lambda}^* \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$



- Primes stop-loss $E[(L_t - a)^+]$:
 - 30 noms dans le portefeuille
 - $M_i = 1, i = 1 \dots n$
- Lorsque λ augmente, les primes stop-loss peuvent être ordonnées (ordre stop-loss)

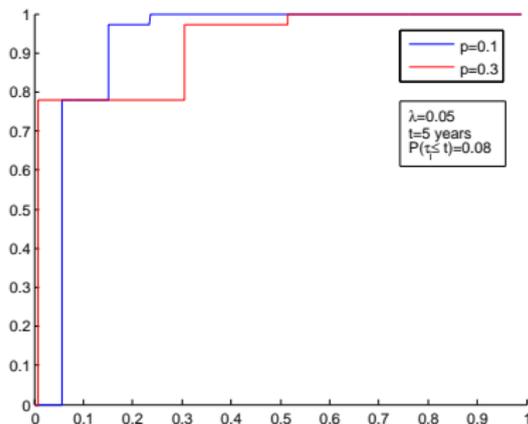


Modèles Poisson multivariés

Theorem ($\lambda = \lambda^*$)

Soient $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ tels que $\bar{\lambda} + p\lambda = \bar{\lambda}^* + p^*\lambda$, alors:

$$p \leq p^*, \bar{\lambda} \geq \bar{\lambda}^* \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$



- Ordre convexe pour les probabilités mélanges

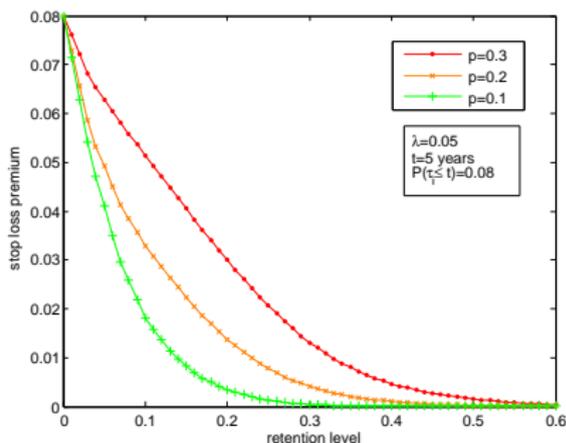


Modèles Poisson multivariés

Theorem ($\lambda = \lambda^*$)

Soient $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ tels que $\bar{\lambda} + p\lambda = \bar{\lambda}^* + p^*\lambda$, alors:

$$p \leq p^*, \bar{\lambda} \geq \bar{\lambda}^* \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$



- Primes stop-loss $\mathbb{E}[(L_t - K)^+]$:
 - 30 noms
 - $M_i = 1, i = 1 \dots n$
- Lorsque p augmente, les primes stop-loss peuvent être ordonnées (ordre stop-loss)

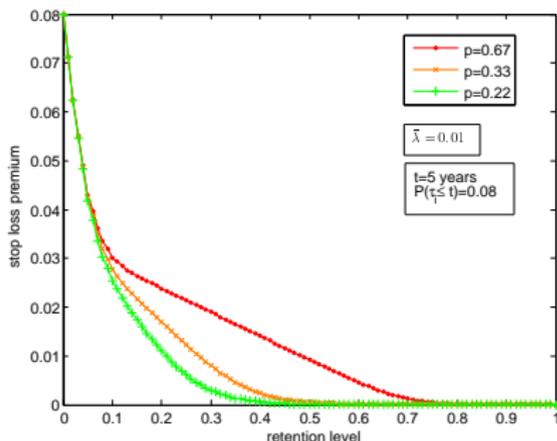


Modèles Poisson multivariés

Theorem ($\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^*$)

Soient $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ tels que $p\lambda = p^*\lambda^*$, alors :

$$p \leq p^*, \lambda \geq \lambda^* \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$



- Primes stop-loss $\mathbb{E}[(L_t - K)^+]$:
 - 30 noms
 - $M_i = 1, i = 1 \dots n$
- Lorsque p augmente, les primes stop-loss peuvent être ordonnées (ordre stop-loss)



Conclusion

- Les **modèles à facteur** constituent un cadre intéressant pour la détermination de la **loi de la perte agrégée** sur laquelle s'appuient :
 - le calcul du niveau minimal de fond propre (Bâle 2)
 - l'évaluation et la couverture de produits dérivés multi-noms
- Dans le cas de **portefeuilles homogènes**, l'hypothèse d'indépendance conditionnelle n'est plus restrictive grâce au **théorème de De Finetti**
- La **probabilité conditionnelle de défaut** qui peut être vue comme la perte d'un **portefeuille infiniment granulaire** joue un rôle prépondérant à la fois pour le calcul de la distribution de la perte mais aussi pour l'analyse du risque dans ces modèles
- Cependant, les modèles à facteur ne reflètent pas ou peu l'évolution stochastique de la corrélation et notamment le **phénomène de contagion**

