

# Analyse du Risque et Couverture des Tranches de CDO Synthétique

Areski COUSIN

Post-Doc Cris,  
Université D'Evry

Groupe de travail - Evry 9 Octobre 2008

# Introduction

- Cadre : analyse du risque et couverture des tranches de CDO synthétique
- Profusion des modèles de dépendance pour l'évaluation des tranches de CDO
- Copule gaussienne reste le modèle de référence
- But : éclaircir certains aspects de la gestion des tranches de CDO
  - Unifier un nombre important d'approches populaires sous le spectre des modèles à facteur
  - Comparaison des modèles à facteur, analyse de l'impact des paramètres de corrélation
  - Étudier le problème de la couverture des tranches de CDOs dans un modèle de contagion

# Contents

- 1 Analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur
  - Les modèles à facteur pour l'évaluation des tranches de CDO
  - Analyse comparative de la dépendance
  - Synthèse
- 2 Couverture des tranches de CDO dans les modèles de contagion
  - Approche théorique
  - Résultats et remarques

## Les modèles à facteur

- Existe depuis longtemps pour modéliser des rendements d'action ou de fonds mutuels
- Modèles de dépendance compréhensibles et simples à manipuler : les défauts sont indépendants conditionnellement à un facteur aléatoire
- Respect de l'intuition économique : la dépendance provient d'un risque systémique non mutualisable (évolution défavorable de variables macro-économiques)
- Parcimonie des paramètres de dépendance
- Existence de méthodes semi-analytiques pour déterminer la loi de la perte
- Approche préconisée par le comité de Bâle II (Approche IRB)

## Les modèles à facteur

- Portefeuille de crédit composé de  $n$  obligations
- $\tau_1, \dots, \tau_n$  temps de défaut
- $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) = (1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, 1_{\{\tau_n \leq t\}})$  : les indicatrices de défaut à la date  $t$
- $M_1, \dots, M_n$  pertes en cas de défaut
- Processus de la **perte agrégée** gouverne les cash-flows des tranches de CDO

$$L_t = \sum_{i=1}^n M_i 1_{\{\tau_i \leq t\}}$$

- L'évaluation des tranches de CDO reposent sur les lois marginales de la perte agrégée

# Théorème de De Finetti et représentation à facteur

- Temps de défaut **échangeables**

$$(\tau_1, \dots, \tau_n) \stackrel{d}{=} (\tau_{\sigma(1)}, \dots, \tau_{\sigma(n)})$$

pour toute permutation  $\sigma$

- Mêmes marginales, mêmes lois des couples, même lois jointes des sous-ensembles de même taille
- En particulier,  $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) = (1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, 1_{\{\tau_n \leq t\}})$  échangeables pour tout  $t$

## Théorème de De Finetti et représentation à facteur

- $D_1, \dots, D_n, \dots$  forment une suite de variables aléatoires de Bernoulli échangeables
- **Théorème de De Finetti** : il existe un unique facteur aléatoire  $\tilde{p}$  tel que
  - $D_1, \dots, D_n$  soient conditionnellement indépendants sachant  $\tilde{p}$
  - Si  $\nu_t$  représente la loi de  $\tilde{p}$ ,  $d_i = 0, 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $s = \sum_{i=1}^n d_i$ , alors :

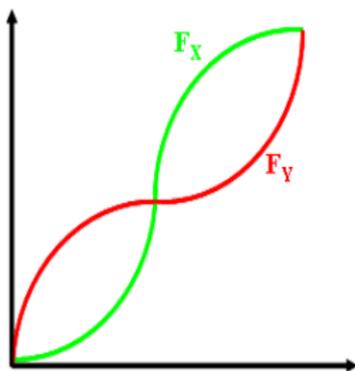
$$\mathbb{Q}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n) = \int_0^1 p^s (1-p)^{(n-s)} \nu_t(dp).$$

- **Echangeabilité au sens strict** garantit seulement l'existence d'une **mesure signée Jaynes (1986)**
- $\tilde{p}$  caractérisé par la perte d'un portefeuille infiniment granulaire :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s.} \tilde{p} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

## Ordre convexe

- Compare le **niveau de dispersion** entre deux variables aléatoires
- **Ordre convexe** :  $X \leq_{cx} Y$  if  $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$  pour toute fonction convexe  $f$
- $X \leq_{cx} Y \Rightarrow \mathbb{E}[(X - K)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - K)^+]$  for all  $K \in \mathbb{R}$
- $X \leq_{cx} Y$  si  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$  et  $F_X$ , la fonction de répartition de  $X$  et  $F_Y$ , la fonction de répartition de  $Y$  sont telles que :



# Ordre supermodulaire

- Compare le **niveau de dépendance interne** entre deux vecteurs aléatoires
- $(X_1, \dots, X_n) \leq_{sm} (Y_1, \dots, Y_n)$  si  $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] \leq \mathbb{E}[f(Y_1, \dots, Y_n)]$  pour toute fonction supermodulaire  $f$

## Definition (fonction supermodulaire)

Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est **supermodulaire** si pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  et  $\varepsilon, \delta > 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ & \geq f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

## Revue de la littérature



Müller(1997)

*Stop-loss order for portfolios of dependent risks*

$$(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*) \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i D_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n M_i D_i^*$$



Bäuerle and Müller(2005)

*Stochastic orders and risk measures : Consistency and bounds*

$$X \leq_{cx} Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

pour toute mesure de risque convexe  $\rho$



Lefèvre and Utev(1996)

*Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables*

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow \sum_{i=1}^n D_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n D_i^*$$

## Résultat principal



Cousin and Laurent(2008)

*Comparison results for exchangeable credit risk portfolios*

- Comparaison de deux portefeuilles de crédit
  - **Premier portefeuille** :  $D_1, \dots, D_n$  variables aléatoires de Bernoulli échangeable associées au facteur  $\tilde{p}$
  - **Second portefeuille** :  $D_1^*, \dots, D_n^*$  variables aléatoires de Bernoulli échangeable associées au facteur  $\tilde{p}^*$
  - Pertes :  $L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_i$  and  $L_t^* = \sum_{i=1}^n M_i D_i^*$

### Theorem

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$

- En particulier, si  $\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*$ , alors :
  - $\mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+]$  pour tout  $a > 0$ .
  - $\rho(L_t) \leq \rho(L_t^*)$  pour toute mesure de risque convexe  $\rho$

# Comparaison du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur

- Pour la plupart des modèles à facteur :
  - Modèles à facteur basés sur des fonctions copules (copule gaussienne, Student, copules archimédiennes)
  - Modèle à chocs communs
  - Modèle structurel multivarié
- L'augmentation du paramètre de dépendance entraîne :
  - Une diminution de la prime des tranches equity (tranches couvrant les premières pertes)
  - Une augmentation de la prime des tranches senior (tranches couvrant les dernières pertes)
  - Une augmentation des mesures de risque convexes sur la perte agrégée

## Modèle à facteur additif

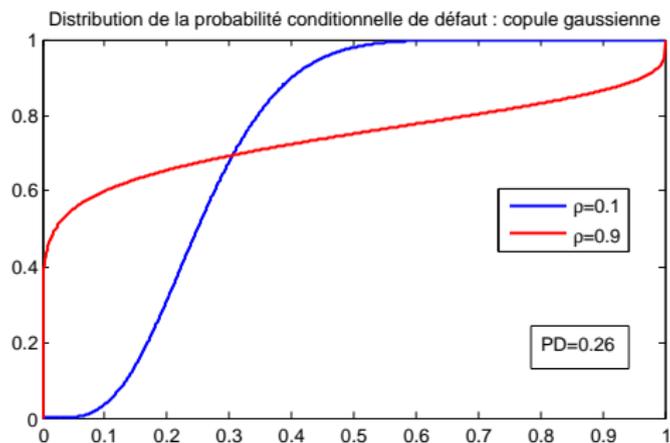
- La structure de dépendance des temps de défaut est régit par des variables latentes  $V_1, \dots, V_n$  telles que :
- $V_i = \rho V + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{V}_i, i = 1 \dots n$
- où  $V, \bar{V}_i, i = 1 \dots n$  sont indépendantes
- Les temps de défaut sont définis par :  $\tau_i = G^{-1}(H_\rho(V_i)), i = 1 \dots n$ 
  - où  $G$  : fonction de répartition de  $\tau_i$
  - et  $H_\rho$  : fonction de répartition de  $V_i$
- $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}, i = 1 \dots n$  sont indépendantes connaissant le facteur  $V$
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{P.S} E[D_i | V] = P(\tau_i \leq t | V) = \tilde{p}_t$

# Modèle à facteur additif

## Theorem

Pour tout horizon  $t$ , notons  $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$ ,  $i = 1 \dots n$  et  $D_i^* = 1_{\{\tau_i^* \leq t\}}$ ,  $i = 1 \dots n$  les indicatrices de défaut correspondantes à (resp.)  $\rho$  et  $\rho^*$ , alors :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow \tilde{p}_t \leq_{sl} \tilde{p}_t^*$$



# Synthèse

- Dans le cas de **portefeuilles homogènes**, l'hypothèse d'indépendance conditionnelle n'est plus restrictive grâce au **théorème de De Finetti**
- La **probabilité conditionnelle de défaut** joue un rôle prépondérant à la fois pour
  - le calcul de la distribution de la perte
  - comparaison des modèles à facteur et étude de la dépendance
- Cependant, les modèles à facteur ne reflètent pas directement le **phénomène de contagion**

# Introduction

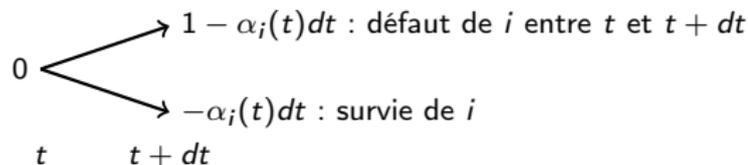
- Marché action, taux d'intérêt : évaluation de produits dérivés basée sur le coût d'une stratégie de couverture
- Sur les marchés des CDOs, ce n'est pas le cas :
  - Interaction entre risque de spread et risque de défaut, grande dimension du portefeuille de crédit, incertitude sur les taux de recouvrement
  - En pratique, couverture locale du risque de spread dans un modèle copule gaussienne - base corrélation
- Nécessité de relier l'évaluation des dérivés de crédit au prix de la couverture

# Temps de défaut

- Portefeuille composé de  $n$  références
- Temps de défaut :  $\tau_1, \dots, \tau_n$  définis sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- Indicatrices de défaut :  $N_i(t) = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$ ,  $i = 1, \dots, n$
- $\mathcal{H}_{i,t} = \sigma(N_i(s), s \leq t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mathcal{H}_t = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{H}_{i,t}$ 
  - filtration naturelle des temps de défaut
  - Temps de défaut ordonnés :  $\tau^1, \dots, \tau^n$
  - Pas de défauts simultanés :  $\tau^1 < \dots < \tau^n - \mathbb{P}$  p.s.
- $\alpha_i^{\mathbb{P}}$ ,  $i = 1, \dots, n$   $\mathbb{P}, \mathcal{H}_t$  intensités
  - $N_i(t) - \int_0^t \alpha_i^{\mathbb{P}}(s) 1_{\{\tau_i > s\}} ds$ ,  $i = 1, \dots, n$   $\mathbb{P}, \mathcal{H}_t$ -martingales

# Hypothèses de marché

- **CDS digitaux instantanés** côtés sur chaque sous-jacent du portefeuille
- Qu'est ce qu'un CDS digital instantané sur le nom  $i$ ?
  - Acheteur de protection reçoit 1 en cas de défaut du nom  $i$  entre  $t$  et  $t + dt$
  - En échange, une prime de  $\alpha_i(t)dt$  couvrant la période  $[t, t + dt]$  est versée au vendeur de protection



- Cash-flow en  $t + dt$  :  $dN_i(t) - \alpha_i(t)dt$
- Pas de risque de spread spécifique : les primes de CDS,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , sont supposées être des processus prévisibles par rapport à la filtration  $\mathcal{H}_t$  (cadre de [BJR\(2007\)](#), [BCJR\(2007\)](#))

## Probabilité risque neutre

- Par absence d'opportunité d'arbitrage, on a :

$$\{\alpha_i(t) > 0\} \stackrel{\mathbb{P}\text{-p.s.}}{=} \{\alpha_i^{\mathbb{P}}(t) > 0\}, i = 1, \dots, n$$

- Sous certaines hypothèses de régularité, il existe une unique probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  soient les  $(\mathbb{Q}, \mathcal{H}_t)$ -intensité des temps de défaut ([Brémaud](#), chap.VI)

# Couverture et théorème de représentation de martingale

- On cherche à couvrir un actif risqué  $M$ ,  $\mathcal{H}_T$ -mesurable,  $\mathbb{Q}$ -intégrable
- Théorème de représentation de martingale (Brémaud chap. III) : il existe des processus  $\mathcal{H}_t$ -prévisible,  $\theta_1, \dots, \theta_n$  tels que :

$$M = E^{\mathbb{Q}}[M] + \sum_{i=1}^n \int_0^T \theta_i(t) (dN_i(t) - \alpha_i(t) \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} dt)$$

- Réplication de  $M$  en investissant initialement  $E^{\mathbb{Q}}[Me^{-rT}]$  dans l'actif sans risque et en prenant en  $t$ , sur la période  $[t, t + dt]$ , une position sur les CDS instantanés des noms survivants
  - Pour le nom  $i$  par exemple, prise de position en  $t$  sur  $\theta_i(t)e^{-r(T-t)}$  CDS instantané relatif au nom  $i$
  - Gain potentiel épargné en  $t + dt$  au taux  $r$
  - Perte potentiel emprunté en  $t + dt$  au taux  $r$
- Coût de la réplication en  $t$  :  $V_t = E^{\mathbb{Q}}[Me^{-r(T-t)} | \mathcal{H}_t]$

# Modèles de contagion markovien homogène

- Nécessité d'hypothèses supplémentaires pour le calcul effectif des stratégies de couverture

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = \alpha(t, N(t)), & i = 1, \dots, n \\ N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \end{cases}$$

- Les spreads dépendent uniquement de l'état courant des défauts : **Cadre markovien**
- Les spreads dépendent uniquement du nombre de défaut courant : **Approche mean-field**
- Les spreads des noms survivants sont les même : **Hypothèse d'homogénéité**

# Modèles de contagion markovien homogène

- Pas de défauts simultanés : l'intensité  $\lambda$  de  $N(t)$  est simplement la somme des intensités individuelles des noms survivants :

$$\lambda(t, N(t)) = (n - N(t)) \alpha(t, N(t))$$

- $N(t)$  est alors une chaîne de Markov à temps continu de matrice génératrice :

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t, 0) & \lambda(t, 0) & 0 & & 0 \\ 0 & -\lambda(t, 1) & \lambda(t, 1) & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda(t, n-1) & \lambda(t, n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

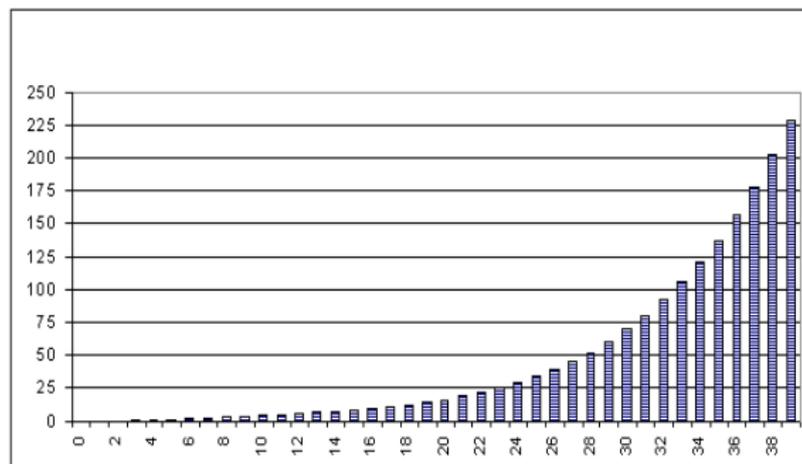
# Modèles de contagion markovien homogène

- Prix de réplication d'une tranche de CDO :  $V_t = V_{CDO}(t, N(t))$ 
  - Depend seulement du nombre de défaut
  - et des caractéristiques de la tranche
- Grâce à l'homogénéité entre les noms :
  - Tous les ratios de couverture par rapport aux CDS individuels sont les mêmes
  - Couverture avec l'indice CDS et l'actif sans risque
- Ratio de couverture :

$$\delta(t, N(t)) = \frac{V_{CDO}(t, N(t) + 1) - V_{CDO}(t, N(t))}{V_{Index}(t, N(t) + 1) - V_{Index}(t, N(t))}$$

## Résultats et remarques

- **Couverture de tranche de CDO sur indice Itraxx** :  $n = 125$  références, taux d'intérêt  $r = 3\%$ , taux de recouvrement  $R = 40\%$ , maturité  $T = 5$  ans
- Intensité homogène en temps :  $\lambda(t, k) = \lambda(k)$ ,  $k = 0, \dots, 125$
- Calibration des  $\lambda(k)$ ,  $k = 0, \dots, 125$  à partir de données de marché :



# Résultats et remarques

- Dynamique des **spreads d'indice** en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	Weeks			
	0	14	56	84
0	20	19	17	16
1	0	31	23	20
2	0	95	57	43
3	0	269	150	98
4	0	592	361	228
5	0	1022	723	490
6	0	1466	1193	905
7	0	1870	1680	1420
8	0	2243	2126	1945
9	0	2623	2534	2423
10	0	3035	2939	2859

# Résultats et remarques

- Dynamique des **deltas tranche equity [0, 3%]** en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	OutStanding Nominal	Weeks			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.541	0.617	0.823	0.910
1	2.52%	0	0.279	0.510	0.690
2	2.04%	0	0.072	0.166	0.304
3	1.56%	0	0.016	0.034	0.072
4	1.08%	0	0.004	0.006	0.012
5	0.60%	0	0.002	0.002	0.002
6	0.12%	0	0.001	0.000	0.000
7	0.00%	0	0	0	0

# Résultats et remarques

- Dynamique des **deltas tranche mezzanine [3%, 6%]** en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	OutStanding Nominal	Weeks			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.139	0.134	0.096	0.060
1	3.00%	0	0.168	0.197	0.179
2	3.00%	0	0.118	0.197	0.268
3	3.00%	0	0.061	0.111	0.187
4	3.00%	0	0.029	0.049	0.085
5	3.00%	0	0.016	0.021	0.034
6	3.00%	0	0.016	0.012	0.014
7	2.64%	0	0.022	0.011	0.008
8	2.16%	0	0.031	0.014	0.007
9	1.68%	0	0.031	0.020	0.010
10	1.20%	0	0.023	0.021	0.013
11	0.72%	0	0.014	0.014	0.012
12	0.24%	0	0.005	0.005	0.005
13	0.00%	0	0	0	0

# Résultats et remarques

- Comparaison entre deltas trader (salle de marché) et deltas de réplication :

	<b>[0-3%]</b>	<b>[3-6%]</b>	<b>[6-9%]</b>	<b>[9-12%]</b>	<b>[12-22%]</b>
<b>market deltas</b>	27	4.5	1.25	0.6	0.25
<b>model deltas</b>	21.5	4.63	1.63	0.9	0.6

# Conclusion

- Sous certaines hypothèses :
  - Pas de défauts simultanés
  - Risque de spread gouverné par le risque de défaut
- Marché complet : couverture de tranches de CDO avec des CDS digitaux instantanés associés aux références du portefeuille sous-jacent
- Dans un cadre un peu plus restrictif :
  - Cadre Markovien
  - Homogénéité du portefeuille de crédit
- Il est possible de répliquer parfaitement des tranches de CDO avec l'indice et l'actif sans risque
- Mise en oeuvre simple et rapide d'une méthode de calcul des ratios de couverture