



MÉMOIRE DE SYNTHÈSE

en vue de l'obtention de l'

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée et soutenue publiquement par

Areski Cousin

le 4 décembre 2015

Quelques Contributions à la Gestion des Risques Financiers

Jury :

M. Patrice FONTAINE,	Directeur de recherches, CNRS
M. Jean-Paul LAURENT,	Professeur, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
M. Constantin MELLIOS,	Professeur, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
M. Patrick NAVATTE,	Professeur, IGR-IAE de Rennes, Université Rennes 1
M. François QUITTARD-PINON,	Professeur, EM Lyon Business School
M. Peter WIRTZ,	Professeur, Université Jean Moulin Lyon 3

Au vue des rapports de :

M. Patrice FONTAINE,	Directeur de recherches, CNRS
M. Constantin MELLIOS,	Professeur, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
M. Patrick NAVATTE,	Professeur, IGR-IAE de Rennes, Université Rennes 1

Remerciements

J'adresse d'abord ma plus vive reconnaissance à François Quittard-Pinon pour avoir accepté de superviser mon projet d'HDR à l'Université Lyon 3. Je le remercie amicalement pour ses précieux conseils et pour son soutien. Je souhaiterais également exprimer ma profonde gratitude à Jean-Paul Laurent pour ses conseils avisés. J'ai connu Jean-Paul en tant que directeur de thèse et, depuis, il a su me faire partager son goût et sa vision de la recherche. Je le remercie pour les nombreux échanges toujours très enrichissants que l'on a pu avoir et qui m'ont beaucoup inspirés pour mes projets de recherche. Je voudrais également remercier Monique Jeanblanc et Stéphane Crépey qui ont beaucoup compté pour moi d'un point de vue scientifique et humain. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec eux pendant mon post-doc à l'Université d'Evry. Ils sont désormais des collaborateurs et amis chers.

J'adresse un grand merci à Patrice Fontaine, Constantin Mellios et Patrick Navatte pour avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour l'intérêt et le temps qu'ils ont accordé à la lecture de mon mémoire et pour les commentaires fructueux qu'ils ont formulés. Leurs retours ont été pour moi une source d'encouragement importante. Je remercie chaleureusement Peter Wirtz qui m'a fait l'honneur d'être membre de mon jury à une période de l'année très chargée.

Je souhaiterais également remercier tous mes collaborateurs et en particulier Didier Rullière et Diana Dorobantu. Qui aurait cru que les modèles de contagion nous auraient ouvert à de si belles destinations! Merci également à Elena Di Bernardino pour son enthousiasme et son dynamisme. Je pense aussi à Tom Bielecki et à Ragnar Norberg qui m'ont énormément apporté scientifiquement en m'ouvrant à de nouvelles perspectives de recherche. J'ai également eu grand plaisir à collaborer avec Hassan Maatouk et ses collègues de l'École des Mines de Saint-Etienne, Xavier Bay, Olivier Roustant et Nicolas Durrande qui m'ont fait découvrir tant de choses intéressantes sur le krigeage. Merci à Alexander Herbertsson. Je n'oublierai pas le séjour de recherche à Göteborg et sa ténacité pour venir à bout de la calibration du modèle "Markov copula". Merci également à Christophette Blanchet-Scalliet, Jean-David Fermanian, Alexandre Janon et Yu Hang Kan.

Merci à mes collègues et amis de l'ISFA, Patricia Bartolo, Caroline Bayart, Christophette Blanchet-Scalliet, Samy Brias, Diana Dorobantu, Ying Jiao, Nabil Kazi Tani, Abdou Kelani, Fabien Laguillaumie, Véronique Maume-Deschamp, Esterina Masiello, Pierre Ribereau, Didier Rullière, Khalil Said. Je remercie tout particulièrement Béatrice Rey-Fournier, qui a partagé mon bureau pendant toutes ces années et qui vient d'obtenir un poste de Professeur à l'Université Lyon 2.

J'ai par ailleurs beaucoup appris des doctorants que j'ai co-encadrés : merci à Ibrahima

Niang qui soutient bientôt, à Réda Kheliouen et à Thierry Moudiki.

Un grand merci également à ma famille et à mes amis pour leur soutien constant. Merci à Olivier pour son hospitalité.

Enfin, je souhaiterais dédier ce mémoire à ma femme, Laetitia, qui m'a accompagné dans ce projet avec une infinie patience. Merci d'avoir eu foi en moi dans les moments de doute.

Table des matières

Introduction	4
1 Evaluation et couverture de tranches de CDO synthétique	10
1.1 Evaluation dans un modèle de contagion de défaut	10
1.2 Couverture de tranches de CDO synthétique	14
1.2.1 Couverture parfaite dans un modèle de contagion de défauts	15
1.2.2 Performance des stratégies de couverture	18
1.2.3 Couverture dynamique dans un modèle bottom-up à chocs communs	22
2 Quantification des risques et incertitude inhérente à leur modélisation	27
2.1 Mesures de risque multidimensionnelles	28
2.2 Quelques contributions à l'étude du risque de modélisation	32
2.2.1 Incertitude inhérente à la construction de structures par terme	32
2.2.2 Sur la compatibilité entre ordres stochastiques et indices de Sobol	38
3 Perspectives de recherche	40
3.1 Filtrage récursif de processus ponctuels marqués	40
3.2 Couverture des risques en présence d'incertitude de modèle	42

Introduction

Ce document présente une synthèse des travaux de recherche que j'ai pu effectuer après ma thèse de doctorat, soutenue en octobre 2008. Ces travaux concernent plusieurs contributions dans le domaine de la gestion des risques financiers.

La série de crises financières que nous avons connue ces dernières années (crise des subprime, crise de la liquidité, crise de la dette souveraine européenne) a conduit le régulateur, les institutions financières et le milieu académique à réfléchir sur de nouvelles pratiques de gestion des risques. Ainsi, de nouveaux domaines de recherche comme la gestion du risque de contrepartie, du risque de liquidité ou du risque de refinancement, l'étude du risque systémique et la prise en compte du risque de modélisation ont émergé dans ce contexte d'instabilité économique et financière. Les contributions présentées dans ce mémoire s'inscrivent pour la plupart dans le cadre de ces nouveaux champs de réflexion.

Nous avons choisi de regrouper ces contributions en deux axes de recherche, chacun constituant un chapitre de ce mémoire.

Le premier axe de recherche présenté au Chapitre 1 s'inscrit dans la continuité de mes travaux de thèse. Il concerne le développement de méthodes de gestion du risque pour des portefeuilles de crédit. Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'évaluation et à la couverture de tranches de CDO synthétique. Suite à la crise des subprimes, les institutions financières, incitées à diminuer leur exposition sur ces produits, ont cherché à mettre en œuvre des méthodes efficaces de réduction des risques. En conséquence, le problème de l'évaluation et de la couverture des tranches de CDO est devenu à ce moment un sujet majeur. Ces produits financiers engendrent des flux qui dépendent de l'arrivée de défauts dans un portefeuille de crédit et plus spécifiquement de la perte totale engendrée par ces défauts. Les risques en jeu sont habituellement divisés en plusieurs catégories comme le risque de spread, le risque de défaut, le risque de corrélation et le risque de contagion. Les principales difficultés associées à la gestion de ces produits résultent à la fois de la grande dimension du portefeuille sous-jacent (125 entités par exemple pour l'indice iTraxx le plus liquide) mais également de l'interaction entre ces différentes catégories de risques. Dans cette partie, nous avons choisi de présenter deux ensembles de contributions. Le premier ensemble, introduit à la Section 1.1, concerne l'étude d'une extension du modèle de contagion de défauts de [Davis et Lo \(2001\)](#) à un cadre multi-périodique. Ce nouveau modèle de contagion permet, contrairement au modèle original de [Davis et Lo \(2001\)](#), d'évaluer des tranches de CDO standardisées. Après avoir calibré les paramètres du modèle sur des tranches standardisées de CDO, nous avons montré que les cotations de marché en période de crise reflétaient un niveau significatif du risque de contagion de défaut. Le second groupe de travaux est décrit à la Section 1.2. Il concerne plus spécifiquement le problème de la couverture des tranches de CDO. Ce sujet est abordé

sous différents angles. Nous avons d'abord étudié le problème de la couverture sous un angle théorique en exhibant deux modèles, un modèle de contagion de défaut et un modèle structurel multidimensionnel, dans lesquels il est possible de dupliquer parfaitement une tranche avec une stratégie auto-financée impliquant les CDS sur les noms du portefeuille sous-jacent. Cependant, ces stratégies de couverture dynamique ne peuvent être mises en œuvre efficacement que dans un cadre markovien et sous des hypothèses d'homogénéité des spreads et des taux de recouvrement. Cela nous a conduit dans un second temps à étudier et à comparer, dans différentes situations de marché, les performances de ces stratégies lorsque l'indice CDS est utilisé comme principal instrument de couverture. Enfin, nous avons introduit un modèle d'évaluation de portefeuilles de crédit grâce auquel il est possible de mettre en œuvre des stratégies de couverture individuelles dans un véritable cadre dynamique.

Le deuxième axe de recherche est présenté au Chapitre 2. Il concerne la quantification des risques et l'analyse de l'incertitude inhérente à leur modélisation. Nous proposons d'abord d'étudier à la Section 2.1 le problème de la construction de mesures de risque. En particulier, nous avons considéré des extensions de la Value-at-Risk et de la Conditional-Tail-Expectation à un cadre multidimensionnel où les risques en jeu ne peuvent pas nécessairement être agrégés. C'est le cas par exemple si ces derniers sont de nature hétérogène et ne peuvent pas être comparés. Contrairement à d'autres mesures multidimensionnelles existantes, nos mesures quantifient le risque par autant de valeurs que la dimension du risque sous-jacent. Cette propriété est importante d'un point de vue pratique, notamment pour comparer les composantes de risques dans un environnement multidimensionnel. Par ailleurs, les mesures que nous avons introduites vérifient des extensions directes des propriétés d'homogénéité positive, d'invariance par translation et d'additivité comonotone. Nous avons également étudié comment nos mesures se comportent par rapport à des perturbations de risque, comme une augmentation d'un risque marginal ou une augmentation du degré de dépendance entre les risques. Ce chapitre s'intéresse également à l'étude du risque de modélisation. Suite aux crises financières de 2008-2010, d'importantes mises à jour du cadre réglementaire ([BIS \(2011\)](#), [Federal Reserve \(April 2011\)](#), [EBA \(November 2012\)](#)) ont été effectuées pour que les institutions financières prennent en compte leur risque de modèle, i.e., le risque de perte financière résultant de l'utilisation, dans le processus de gestion des risques, de modèles inappropriés ou mal spécifiés. Cette thématique a été abordée à la Section 2.2 suivant deux directions. La première concerne l'analyse de l'incertitude associée à la construction de structures par terme. Dans ce mémoire, le terme structure par terme désigne une courbe représentant l'évolution d'une variable économique ou financière de référence en fonction de l'horizon temporel. Il s'agit classiquement de courbe de taux d'intérêt, mais cela peut concerner d'autres types de structures comme des courbes de probabilités de défaut implicites ou des courbes ou surfaces de volatilité. La construction de telles courbes est au cœur du problème d'évaluation et de couverture des risques en finance et en assurance. Cependant, le marché ne fournit habituellement qu'une information partielle et indirecte sur la courbe à construire. Ainsi, il existe une infinité de courbes compatibles avec les observations de marché. En imposant par ailleurs des contraintes de non-arbitrage, nous avons développé une méthode qui étend les techniques d'interpolation basées sur des splines et qui permet en outre de quantifier l'incertitude aux différents points de la courbe. La seconde direction de recherche a consisté à établir des liens entre la théorie des ordres stochastiques et les indices de Sobol, utilisés dans le domaine de l'analyse de sensibilité pour quantifier la sensibilité d'un modèle à l'incertitude inhérente à l'estimation de ses paramètres.

Au chapitre 3, nous présentons deux perspectives de recherche, la première sur le filtrage

de processus ponctuels marqués et la seconde sur le problème de la couverture des risques financiers en présence de risque de modèle. Les applications associées au filtrage de processus ponctuel concernent le développement de nouvelles méthodes d'estimation statistique pour des modèles de crédit en se basant uniquement sur un historique de défauts ou de migrations de rating. La seconde direction de recherche a pour objectif de couvrir dynamiquement des risques financiers en présence d'incertitude sur le modèle. L'idée est de couvrir les risques sur un certain horizon temporel en réduisant l'incertitude sur le modèle au fur et à mesure que la dynamique des risques est observée.

Collaborations de recherche

Mes travaux sur l'évaluation et la couverture de tranches de CDO synthétique présentés au Chapitre 1 ont été réalisés en partie dans le cadre de mon post-doctorat à l'Université d'Evry-val-d'Essonne, de Septembre 2008 à Septembre 2009, où j'ai eu l'opportunité de travailler avec Monique Jeanblanc, Jean-Paul Laurent, Stéphane Crépey, Tom Bielecki et Alexander Herbertsson. Le travail sur l'extension du modèle de contagion de Davis et Lo a été mené entre 2009 et 2010 en collaboration avec deux collègues de l'ISFA, Diana Dorobantu et Didier Rullière. Le chapitre 2 sur les mesures de risque multidimensionnelles a été réalisé en collaboration avec Elena di Bernardino (actuellement MCF au CNAM) alors qu'elle était en thèse à l'ISFA. Le travail sur le risque de modélisation développé au Chapitre 2.2 a été mené en partie dans le cadre de la thèse d'Ibrahima Niang que je co-encadre actuellement avec Véronique Maume-Deschamps. La méthode de construction de structures par terme basée sur des techniques de krigeage est issue d'une collaboration avec Didier Rullière et Hassan Maatouk, étudiant en thèse à l'école des Mines de St-Etienne.

Expériences d'encadrement doctoral

Une partie des travaux présentés dans ce mémoire a été réalisée dans le cadre de co-directions de thèse. Je co-encadre actuellement trois étudiants en thèse.

- Depuis Octobre 2012, je co-dirige, avec Véronique Maume-Deschamps (Prof. A l'Université Lyon 1), la thèse de doctorat de M. Ibrahima Niang, moniteur à l'ISFA, Université Lyon 1. Sa thèse concerne l'analyse de l'incertitude associée à la construction de courbes de taux ou de crédit et l'étude de la compatibilité des indices de Sobol avec la théorie des ordres stochastiques. Pour le moment, ce travail de thèse a fait l'objet de deux articles soumis à des revues à comité de lecture et d'un article en cours de préparation.
- Depuis Avril 2013, je co-dirige avec Béatrice Rey-Fournier (Prof. à l'Université Lyon 2) la thèse de doctorat de M. Réda Khelouen, en contrat CIFRE avec l'entreprise BNP Paribas CIB. Sa thèse concerne la gestion du risque d'un portefeuille de dettes et notamment la modélisation et l'estimation des changements de notation financière. Pour le moment, ce travail a fait l'objet d'un article soumis et de deux articles en cours de préparation.
- Depuis Novembre 2014, je co-dirige, avec Frédéric Planchet, la thèse de doctorat de Thierry Moudiki. Sa thèse porte sur la modélisation des taux d'intérêt en assurance,

notamment dans le cadre de la réglementation prudentielle Solvabilité 2. Un article est en cours de rédaction sur le sujet.

Participation à des projets de recherche

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont bénéficié du soutien de plusieurs projets de recherche auxquels j'ai eu l'opportunité de participer.

- Coordinateur de l'axe "propagations d'incertitudes" du semestre thématique "Monte Carlo : propagations d'incertitudes, méthodes particulières, algorithmes stochastiques en Big Data", labex Louis Bachelier, depuis septembre 2015
- Membre de l'initiative de recherche "Systemic Risk", Institut Europlace de Finance, depuis avril 2014
- Participation à une étude de recherche sur la gestion actif-passif, contrat de recherche entre le laboratoire SAF et Groupama Asset Management, depuis juin 2014
- Membre de la chaire BNP Paribas Cardif "Management de la Modélisation", depuis 2011
- Membre du projet ANR AST&Risk "Approches Spatio-Temporelles pour la Modélisation de Risque" de 2009 à 2012
- Membre du projet MIRACCLE-GICC "Measures and Risk Indicators for Climate Change" de 2011 à 2013

Liste des travaux de recherche effectués après la thèse

Articles publiés

- Cousin, A., Discussion sur l'article "La Mesure du Risque Systémique après la Crise Financière" de Olivier de Bandt, Jean-Cyprien Héam, Claire Labonne et Santiago Tavoraro, la Revue économique, Volume 66, Numéro 3, Mai 2015
- Bielecki, T., A. Cousin, S. Crépey, A. Herbertsson, A Bottom-Up Dynamic Model of Portfolio Credit Risk with Stochastic Intensities and Random Recoveries, Communication in Statistics - Theory and Methods, Volume 43, Issue 7, 1362-1389, 2014
- Bielecki, T., A. Cousin, S. Crépey, A. Herbertsson, Dynamic Hedging of Portfolio Credit Risk in a Markov Copula Model, Journal of Optimization Theory and Applications, Volume 161, 90-102, 2014
- Cousin, A., E. Di Bernardino, On Multivariate Extensions of Conditional-Tail-Expectation, Insurance : Mathematics and Economics, Volume 55, 272-282, 2014
- Cousin, A., E. Di Bernardino, On Multivariate Extensions of Value-at-Risk, Journal of Multivariate Analysis, Volume 119, 32-46, 2013
- Cousin, A., D. Rullière, D. Dorobantu, An Extension of Davis and Lo's Contagion Model, Quantitative Finance, Volume 13, Issue 3, 407-420, 2013
- Cousin, A., S. Crépey, Y. H. Kan, Delta-Hedging Correlation Risk?, Review of Derivatives Research, Volume 15, Issue 1, 25-56, 2011

Chapitres de livre

- Bielecki, T., A. Cousin, S. Crépey, A. Herbertsson, A Bottom-Up Dynamic Model of Portfolio Credit Risk. Part I : Markov Copula Perspective, in the book “Recent Advances in Financial Engineering 2012”, 25-50, World Scientific, 2012
- Bielecki, T., A. Cousin, S. Crépey, A. Herbertsson, A Bottom-Up Dynamic Model of Portfolio Credit Risk. Part II : Common-Shock Interpretation, Calibration and Hedging Issues, in the book “Recent Advances in Financial Engineering 2012”, 51-74, World Scientific, 2012
- Cousin, A., D. Rullière, D. Dorobantu, Valuation of Portfolio Loss Derivatives in An Infectious Model, in the book “Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance” édité par C. Perna and M. Sibillo, Springer, 2011
- Cousin, A., J.-P. Laurent, Dynamic Hedging of Synthetic CDO Tranches : Bridging the Gap Between Theory and Practice, in the book - Credit Risk Frontiers - edited by T. Bielecki, D. Brigo and F. Patras, Wiley, 2011
- Cousin, A., M. Jeanblanc, Hedging Portfolio Loss Derivatives with CDSs, Festschrift in honour of Robert Elliott, World Scientific, 2011
- Cousin, A., M. Jeanblanc, J.-P. Laurent, Hedging CDO Tranches in a Markovian Environment, in the book - Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010, Springer, 2010

Article de presse

- Bielecki, T., A. Cousin, S. Crépey, A. Herbertsson, In Search of a Grand Unifying Theory, Creditflux Newsletter Analysis, July 2013, 20-21

Articles soumis

- Cousin, A., H. Maatouk, D. Rullière, R. Kriging of Financial Term-Structures, 2015
- Cousin, A., R. Khéliouen, A Comparison Study on the Estimation of Factor Migration Models, 2014
- Cousin, A., A. Janon, V. Maume-Deschamps, I. Niang, On the Consistency of Sobol Indices with respect to Stochastic Ordering of Model Parameters, 2014
- Cousin, A., I. Niang, On the Range of Admissible Term-Structures, 2014

Working papers

- Blanchet-Scalliet, C., A. Cousin, D. Dorobantu, Hitting Time for Correlated Three-Dimensional Brownian motion, 2013
- Cousin, A., D. Dorobantu, D. Rullière, A Note on the Computation of Waring Formula, 2010
- Cousin, A., A Tree-Based Approach to Price Leverage Super-Senior Tranches, 2009, CRIS project and Evry University

Note technique

- Cousin, A., J.-P. Laurent, V. Maume-Deschamps, F. Planchet, B. Rey-Fournier, D.

Rullière, Un Point Méthodologique pour le Bunkering : regroupement des scénarios et *risk-appetite*, note technique pour le comité d'orientation de la Chaire "Management de la Modélisation" (BNP-Paribas Assurances)

Chapitre 1

Evaluation et couverture de tranches de CDO synthétique

Dans ce chapitre, nous proposons de présenter deux ensembles de contributions concernant l'évaluation des risques d'un portefeuille de crédit et la couverture de produits de crédit multi-noms, tels que les tranches de CDO synthétique.

Les CDO synthétiques sont assimilables à des contrats d'assurance qui couvrent tout ou partie des pertes associées à un portefeuille de crédit composé de titres de dette tels que des obligations ou des swaps de défaut (CDS). Le vendeur de protection s'engage à couvrir le montant des pertes si ce dernier se situe dans une fourchette ou une tranche définie contractuellement. En contrepartie, l'acheteur de protection verse une prime d'assurance chaque trimestre jusqu'à maturité du produit. Pour plus de détails sur la description des tranches de CDO et l'évaluation de leur prime, le lecteur est invité à se référer à [Cousin et Laurent \(2008b\)](#) et à [Cousin \(2008\)](#).

1.1 Evaluation dans un modèle de contagion de défaut

Les récentes crises financières (subprime, liquidité, dette souveraine européenne) ont amené le régulateur, les autorités de supervision et le monde académique à s'interroger sur le risque systémique et en particulier sur la propagation des risques au sein du système financier. Des travaux empiriques tels que ceux de [Boissay \(2006\)](#), [Das et al. \(2007\)](#), [Jorion et Zhang \(2007\)](#) ou [Jorion et Zhang \(2010\)](#) ont mis en évidence l'existence d'un phénomène dit de contagion dans l'arrivée des défauts. Ces études soulignent que ce phénomène constitue une source d'interdépendance additionnelle permettant d'expliquer la concentration des défauts, l'effet domino ou la survenance de défauts en chaîne. Dans la discussion de [Cousin \(2015\)](#), nous soulignons les facteurs économiques et financiers qui favorisent le phénomène de contagion de défaut.

Dans la suite de cette section, nous présentons les résultats des articles [Cousin et al. \(2012b\)](#) et [Cousin et al. \(2013\)](#). Ce travail a permis d'étendre à un cadre multi-périodique le modèle de [Davis et Lo \(2001\)](#) qui constitue l'un des tous premiers modèles de contagion de défauts introduit dans la littérature. Notre principal résultat a consisté à exprimer de manière récursif la distribution du nombre total de défauts dans ce cadre multi-périodique. En utilisant les techniques numériques introduites dans [Cousin et al. \(2010\)](#), il a été possible de calculer

efficacement les primes des tranches de CDO en fonction des paramètres de dépendance et de contagion du modèle. Ces paramètres ont ensuite été calibrés sur des cotations de tranches de CDO standardisées.

Davis et Lo considèrent une économie constituée de n émetteurs de dette dans laquelle chaque entité peut faire défaut sur une période donnée de deux manières alternatives. La première correspond à un événement de défaut direct ou spontanée. La seconde correspond à un défaut par contagion : si l'entité n'a pas subi de défaut direct sur la période, elle peut également faire défaut de manière indirecte, en étant contaminée par une autre entité ayant subi un défaut direct. Ainsi, chaque entité est supposée être connectées aux autres par des liens qui sont activés en cas de contamination. Les événements de défauts directs et les liens de contamination ont été modélisés par des variables aléatoires de Bernoulli. L'article de Davis et Lo (2001) s'intéresse à l'évaluation de positions *equity* ou *senior* sur des *Collateralized Bond Obligations*. La valeur de ses positions dépend de la distribution de la perte agrégée du portefeuille obligataire sous-jacent. La perte est supposée être proportionnelle au nombre total de défauts sur la période considérée. Dans ce contexte, Davis et Lo établissent la distribution de la perte agrégée sous l'hypothèse où toutes les sources de risque sont indépendantes et identiquement distribuées.

Nous avons étendu ce modèle dans trois directions. La première a été de considérer un cadre multi-périodique, de sorte que des contaminations successives puissent être possibles (effet domino). La Figure 1.1 illustre un scénario possible de défaut en chaîne dans ce modèle pour un portefeuille composé de 5 entités. Au début de la première période (ensemble de gauche), un défaut direct est observé (indiqué par un S pour "spontané"). Durant la première période, le défaut de cette entité entraîne le défaut d'une seconde entité par contagion (flèche), de sorte qu'en début de deuxième période (ensemble du milieu) une seconde entité est déclarée en défaut (entité désignée par un C pour contagion). Pendant la seconde période, deux nouveaux événements de défaut se produisent, l'un correspondant à un défaut spontané, l'autre étant la conséquence d'un effet de contagion.

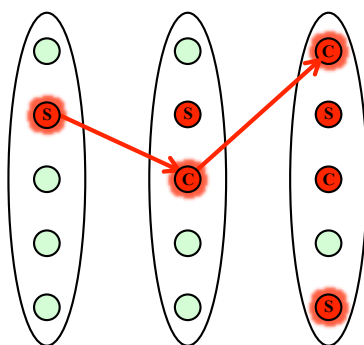


FIGURE 1.1 – Mécanisme d'arrivée des défauts pour 5 entités et 2 périodes.

Notons que l'évaluation de tranches de CDO standardisées repose sur les lois marginales de la perte agrégée du portefeuille à différents horizons. Ces dernières ne peuvent être obtenues que dans un cadre multi-périodique. La seconde direction a consisté à relâcher les hypothèses d'indépendance entre les événements de défaut direct et entre les liens de contamination. En particulier, nous avons considéré le cas où les événements de défaut direct sont conditionnellement indépendants et où par ailleurs, les liens de contamination peuvent l'être également.

Cette extension permet d’inclure dans ce modèle des effets d’inter-dépendance de deux natures différentes : un effet de dépendance des défauts à un facteur systématique et un effet de contagion. La troisième direction a consisté à généraliser les modalités de contamination. Dans le modèle de [Davis et Lo](#), l’activation d’un seul lien de contamination peut être suffisant pour déclencher le défaut d’une entité de manière indirecte. Par ailleurs, toutes les entités peuvent potentiellement engendrer des défauts par contagion. En d’autres termes, les entités et les liens de contamination forment un graphe complet. Nous avons également défini des modalités de contamination plus générales, en imposant par exemple, un nombre minimum de liens de contamination activés pour générer un défaut par contagion et en considérant des ensembles plus restreints d’entités potentiellement infectieuses. Ainsi, plusieurs modes de contagion ont été considérés suivant la définition de l’ensemble E des entités potentiellement infectieuses. La contagion peut être par exemple intra-périodique si l’ensemble E correspond aux noms qui ont subi un défaut spontané sur la période considérée. Elle peut être de nature inter-périodique si l’ensemble E correspond aux noms en défaut à la fin de la période précédente. La contagion peut également provenir d’une source extérieure si E contient des entités qui n’appartiennent pas au portefeuille étudié. Enfin la contagion peut relever d’une combinaison de ces différentes modalités. Notons que dans le papier de [Davis et Lo](#), la contagion ne peut être qu’intra-périodique étant donné qu’une seule période est considérée.

Dans ce contexte, nous avons montré que la distribution du nombre total de défauts sur chaque période pouvait être obtenue à l’aide d’une formule récursive. Ce résultat, qui fait l’objet du Théorème 3.8 dans l’article [Cousin et al. \(2013\)](#), a été dérivé en appliquant successivement la formule de Waring, utilisée à l’origine dans le domaine de l’actuariat pour des calculs d’engagement en assurance vie. Ce résultat s’applique même lorsque les probabilités de défaut direct sont hétérogènes au sein du portefeuille. Cependant, dans ce cas, la distribution de la perte est numériquement trop lourde à établir dès que le nombre d’entités du portefeuille devient important. Comme souvent, la dimension du problème peut être réduite en introduisant des hypothèses d’échangeabilité entre les risques. Nous avons ainsi supposé que les événements de défaut direct étaient échangeables et qu’il en était de même pour les liens de contamination. Dans [Cousin et al. \(2012b\)](#), nous montrons comment, sous ces hypothèses d’échangeabilité, la formule de Waring peut être utilisée de manière imbriquée pour calculer les termes de la récursion donnant la distribution du nombre de défauts. Dans ce cadre, la note [Cousin et al. \(2010\)](#) présente une formule récursive pour le calcul de la formule de Waring qui s’avère être efficace numériquement même pour de grande valeur de n . Ces résultats nous ont permis de mettre en œuvre le modèle pour l’évaluation de tranches de CDO synthétique, dont le portefeuille de crédit sous-jacent peut contenir un nombre important d’entités ($n = 125$ pour les tranches les plus liquides).

Pour l’évaluation de tranches de CDO, nous avons considéré que, sur chaque période, les défauts directs sont conditionnellement indépendants et identiquement distribués sachant¹ un facteur systématique Θ de loi Bêta de moyenne p et de variance σ^2 . Ainsi, le paramètre p représente la probabilité de survenance d’un événement de défaut direct sur une période et σ mesure le degré de dépendance entre les défauts directs. Pour des raisons de parcimonie, nous avons considéré que le même jeu de paramètres s’applique pour toutes les périodes considérées. Par ailleurs, afin d’éviter les difficultés numériques lorsque n est grand (125 noms pour les

1. Sachant $\Theta = \theta$, les indicatrices de défaut direct à la période t , X_t^i , $i = 1, \dots, n$ sont des v.a. de Bernoulli i.i.d. de moyenne θ . Notons que dans ce cas, $\mathbb{E}[X_t^i] = \mathbb{E}[\Theta] = p$ et $\text{Cov}(X_t^i, X_t^j) = \text{Var}(\Theta) = \sigma^2$.

indices iTraxx main Europe et CDX North America), nous avons supposé que, sur toutes les périodes, les liens de contamination sont indépendants et identiquement distribués. Ils sont activés avec une probabilité q . Le mécanisme de contagion que nous avons retenu est intra-périodique avec la présence d'une source de contagion extérieure (une entité n'appartenant pas au portefeuille d'indice). Par ailleurs, nous avons considéré le cas où une seule contamination était suffisante pour déclencher un défaut.

Le calcul des primes pour une tranche de CDO dépend seulement de l'espérance des pertes sur cette tranche à différents horizons. Lorsque les entités sont supposées avoir le même taux de recouvrement R en cas de défaut, la perte de portefeuille est simplement proportionnelle au nombre de défauts. Les spreads des tranches de CDO ont été déterminés à partir de la distribution de la perte à des horizons trimestriels. Le vecteur des paramètres est noté $\alpha = (p, \sigma, q, R)$. Les paramètres p et σ correspondent ainsi à l'espérance et à l'écart-type de la probabilité de défaut direct sur un trimestre. Le paramètre q représente la probabilité d'activation sur un trimestre d'un lien de contamination.

Nous présentons ici les résultats d'un exercice de calibration du modèle sur les cotations des tranches de l'indice iTraxx Europe à deux dates représentatives de deux régimes de marché différents. Rappelons que l'indice iTraxx Europe comporte 125 références ($n = 125$). Ces résultats sont tirés de l'article [Cousin et al. \(2013\)](#). Notons $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_4, \tilde{s}_5, \tilde{s}_6$ les spreads observés des tranches standardisées [0%-3%], [3%-6%], [6%-9%], [9%-12%] et [12%-20%] de l'indice CDS iTraxx et $s_0(\alpha), s_1(\alpha), s_2(\alpha), s_4(\alpha), s_5(\alpha), s_6(\alpha)$ les spreads correspondant calculés dans le modèle de contagion avec le vecteur de paramètres α . La calibration du modèle consiste à trouver le jeu de paramètres $\alpha^* = (p^*, \sigma^*, q^*, R^*)$ qui minimise la fonction objective suivante

$$RMSE(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\tilde{s}_i - s_i(\alpha)}{\tilde{s}_i} \right)^2}.$$

Dans toutes les calibrations, le taux d'intérêt est constant égal à 3% et les paiements sont trimestriels. La Table 1.1 présente les spreads donnés par le modèle et les paramètres optimaux correspondant à des calibrations sur des cotations de tranches iTraxx au 1er mars 2007 et au 31 janvier 2008. Comme on peut le constater sur la Table 1.1, la calibration jointe des tranches et de l'indice CDS sous-jacent est acceptable pour la période de crise de mars 2008. Notons que notre modèle de contagion est capable de reproduire les spreads de marché des tranches *super-senior*, contrairement à certains modèles à facteur pour cette même période. Pour 2007, la performance de la calibration est correcte exceptée pour la tranche *mezzanine* 3%-6%. Les paramètres optimaux résultant de ces exercices de calibration sont donnés à la Table 1.2. Il en ressort que la probabilité de survenance et le niveau de corrélation des événements de défaut direct sur un trimestre (paramètres p^* et σ^*) ainsi que le paramètre de contagion q^* sont plus élevés en janvier 2008 qu'en mars 2007. En effet, le niveau des spreads de crédit s'est considérablement accru entre ces deux dates. En outre, il est important de souligner que, même si les paramètres optimaux p^* et q^* semblent assez faibles, le nombre espéré de défauts peut être significatif étant donné le nombre d'entités dans le portefeuille sous-jacent. Remarquons également que le paramètre de contagion q est décisif pour calibrer le marché (fixer $q = 0$ donne de mauvais résultats de calibration). Cependant, le taux de recouvrement optimal pour 2008 est plus élevé que celui obtenu pour 2007. Ce résultat contre-intuitif s'explique par le fait que les paramètres q et R ont des effets opposés sur la valeur des tranches *senior*. Un niveau plus élevé de contagion q entraîne un épaississement de la queue de distribution de la perte

agrégée et donc une augmentation des pertes espérées sur les tranches *senior*.

	0%-3%	3%-6%	6%-9%	9%-12%	12%-20%	index	RMSE
31 janvier 2008							
Spreads de marché	31	317	212	140	74	77	-
Spreads du modèle	32	328	204	142	77	64	7.5
1er mars 2007							
Spreads de marché	10	46	13	6	2	23	-
Spreads du modèle	10	37	14	6	2	21	9.2

TABLE 1.1 – Spreads de marché et spreads générés par le modèle (bps) pour les tranches de l'indice iTraxx Europe de maturité 5 ans. L'erreur de calibration RMSE est donnée dans la dernière colonne. La tranche *equity* [0%-3%] est cotée en pourcentage.

	p^*	σ^*	q^*	R^*
31 janvier 2008	0.0012	0.0151	0.0007	0.1964
1er mars 2007	0.0001	0.0026	0.0005	0.1346

TABLE 1.2 – Paramètres optimaux $\alpha^* = (p^*, \sigma^*, q^*, R^*)$ correspondant à une période trimestrielle.

Un exercice analogue de calibration a également été mené à partir des spreads des tranches de l'indice CDX North America Investment grade au 31 mars 2008. Les résultats de cette étude sont présentés dans l'article [Cousin et al. \(2012b\)](#). Ils apportent le même type de conclusion : le niveau de contagion induit sur le modèle par les cotations de marché semble être plus important pendant les périodes de crise. De plus, le paramètre de contagion permet de mieux calibrer le modèle sur les tranches *senior*.

Le cadre multi-périodique que nous avons introduit a permis de décrire de manière explicite différentes formes de dynamique de contagion de défauts : contagion inter-périodique, contagion intra-périodique ou contagion issue d'une source extérieure. Contrairement au modèle de [Davis et Lo](#), notre approche permet de capturer des phénomènes de défauts en cascade. Notre modèle permet également d'intégrer la présence d'un facteur de risque systématique constituant une forme alternative d'inter-dépendance entre événements de défaut. Nous avons démontré qu'une version homogène du modèle pouvait être mise en oeuvre et calibrée efficacement sur des cotations de tranches standardisées de CDO. Une fois calibré, ce modèle peut servir pour évaluer des tranches *bespoke* non standard. Cependant, le nombre de sources de risque sur chaque période étant nettement supérieur au nombre d'entités du portefeuille², l'utilisation de ce modèle pour la couverture de tranches de CDO n'est pas envisageable.

1.2 Couverture de tranches de CDO synthétique

Dans cette section, nous présentons un second groupe de contributions. Ce travail concerne principalement l'étude du problème de la couverture pour des produits dont les flux dépendent de l'arrivée de défauts dans un portefeuille d'obligations. C'est le cas par exemple des tranches

2. Les sources de risque sont les indicatrices de défaut direct et les liens de contamination.

de CDO synthétique dont les flux dépendent de l'évolution de la perte agrégée ou des basket-default-swaps dont les flux dépendent de l'ordre d'arrivée des défauts³.

La gestion du risque et la couverture de CDO et des produits associés ont fait l'objet, ces dix dernières années, et notamment suite à la crise de 2007-2008, d'une recherche très active. Les risques en jeu sont habituellement divisés en plusieurs catégories, comme le risque de spread, le risque de défaut, le risque de corrélation et le risque de contagion. En outre, ces risques ne sont pas orthogonaux. Par exemple, un accroissement des spreads de crédit peut être le signe d'une détérioration de la qualité financière d'un émetteur et ainsi d'une augmentation de son risque de défaut ; à l'inverse, l'arrivée d'un défaut peut déclencher un élargissement brutal des spreads de crédit combiné à une modification de la structure de dépendance entre les temps de défaut. Contrairement à la section précédente, les méthodes que nous avons étudiées pour le problème de la couverture reposent sur des modèles de dynamique de risques en temps continu.

Dans ce contexte, nous avons d'abord abordé le problème de la couverture sous un angle théorique.

1.2.1 Couverture parfaite dans un modèle de contagion de défauts

Dans l'article de [Laurent et al. \(2011\)](#), nous avons montré que, dans un modèle de contagion de défauts, le payoff d'une tranche de CDO pouvait parfaitement être dupliqué par un portefeuille auto-financé construit à partir des CDS sous-jacents. Ce raisonnement de couverture peut s'étendre à tous les payoffs qui dépendent de l'arrivée de défauts dans un portefeuille, de sorte que ce modèle de marché peut être considéré comme complet. Ce résultat théorique repose sur deux hypothèses. La première exclut la possibilité de défauts simultanés. La seconde, qui est sans doute la plus contestable, revient à supposer que les intensités de défaut (et donc les spreads de CDS) sont adaptées (uniquement) à la filtration des temps de défaut. Les spreads de crédit des noms survivants sont alors déterministes entre deux dates de défaut et effectuent des sauts à l'arrivée de défauts dans le portefeuille, ces sauts pouvant avoir une amplitude qui dépend du nom en question et de l'historique passé des défauts jusqu'à la date courante. En résumé, ce modèle ne capture pas de risque de spread spécifique autre que celui directement engendré par les défauts. Dans cette approche, la complétude du modèle de marché repose sur un théorème de représentation de martingales dans la filtration des temps de défaut. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, nous avons également identifié une nouvelle mesure de probabilité sous laquelle les intensités de défaut des entités du portefeuille peuvent être interprétées comme des primes de CDS avec une durée de vie infiniment courte et un taux de recouvrement nul. Sous cette nouvelle mesure et pour un horizon fixé, le théorème de représentation de martingale garantit l'existence de stratégies autofinancées permettant de dupliquer à partir de CDS tout payoff contingent à l'arrivée de défauts dans le portefeuille. Notons que ce résultat théorique ne nécessite aucune hypothèse particulière sur le caractère markovien du modèle ni aucune hypothèse d'homogénéité sur les spreads de crédit du portefeuille.

Ce modèle peut être spécifié de deux manières différentes : soit en partant de la distribution jointe des temps de défaut et en dérivant les intensités dans la filtration des défauts, soit en spécifiant directement une forme paramétrique des intensités en fonction des temps

3. Par exemple un first-to-default swap peut être vu comme une assurance sur la perte associée au premier défaut survenant dans un portefeuille de crédit.

de défaut. La première approche qui consiste à partir de la distribution jointe des temps de défaut est la plus générale. Nous l'avons explorée dans la première partie de l'article [Cousin et al. \(2011\)](#) dans le cas simple d'un portefeuille comportant deux noms. Nous avons, dans ce contexte, montré que l'amplitude des sauts sur les intensités à l'arrivée d'un défaut s'exprime en fonction des dérivées de la fonction de survie des temps de défaut. Nous avons par ailleurs établi la dynamique risque-neutre des CDS dans ce modèle. L'article de [Cousin et Jeanblanc \(2012\)](#) constitue la suite de ce travail. Également pour un portefeuille composé de deux noms, nous avons identifié les stratégies qui permettent de dupliquer parfaitement un payoff général avec deux CDS et l'actif sans risque. Dès que le nombre d'entités considérées augmente, le calcul des stratégies devient irréalisable puisqu'il repose à chaque instant sur la valeur des actifs considérés pour tous les scénarios possibles de défauts. Lorsque le portefeuille de couverture est composé de CDS sur les défauts ordonnés (*k*th-to-default-swap), il n'est plus nécessaire de distinguer l'ordre d'arrivée des défauts. Dans cette situation, nous avons montré que les stratégies de duplication peuvent être obtenues en résolvant un système linéaire que nous avons explicité. Cependant, ce résultat n'a qu'une portée théorique puisque dans la pratique, ces produits ne sont pas suffisamment liquides (ou même indisponibles) pour être considérés comme instruments de couverture. Ainsi, la mise en œuvre des stratégies de couverture nécessite le calcul dans le modèle des prix des tranches de CDO et des produits de couverture. Cette tâche est très délicate dans un environnement non-markovien tel que celui décrit ci-dessus.

Afin d'étudier les stratégies de couverture dans ce modèle, nous avons choisi de spécifier les intensités de défaut de la manière la plus simple possible. Dans [Laurent et al. \(2011\)](#) et dans la seconde partie du chapitre de livre [Cousin et al. \(2011\)](#), nous avons supposé d'une part que les intensités de défaut sont les mêmes pour tous les noms survivants⁴ et d'autre part que ces dernières ne dépendent que du nombre de défauts courant. Nous avons également adopté le même taux de recouvrement pour tous les noms du portefeuille. Sous ces hypothèses, nous avons montré que la perte agrégée du portefeuille est une chaîne de Markov homogène et en particulier un processus de naissance pur⁵. Sous ces restrictions, le modèle admet autant de paramètres que d'entité dans le portefeuille sous-jacent, i.e., un paramètre d'intensité par valeur possible du nombre de défauts. Si la distribution marginale de la perte agrégée peut être inférée à partir des cotations de tranches de CDO, il est alors possible d'inférer sans ambiguïté la valeur des intensités de la perte agrégée dans tous les scénarios de défaut. Ce modèle de contagion markovien est maintenant connu sous le nom de modèle à intensité locale par analogie au modèle de volatilité locale introduit par [Dupire \(1994\)](#) pour décrire le marché des options et dont le paramètre de volatilité peut également parfaitement être spécifié à partir des prix d'options. Dans ce modèle, [Cont et al. \(2010\)](#) ont calculé la formule d'intensité locale analogue à celle de Dupire. L'implémentation numérique du modèle markovien peut être réalisée soit en exprimant la dynamique de la perte agrégée à l'aide d'un arbre binomial recombinaison, soit en exploitant les équations forward et backward de Kolmogorov associées à la chaîne de Markov. Dans [Laurent et al. \(2011\)](#) et [Cousin et al. \(2011\)](#), nous montrons que l'effet de contagion est très prononcé dans le modèle une fois ses paramètres calibrés sur des cotations de tranches sur l'indice iTraxx. Par ailleurs, la quantité d'indice CDS prédite par le modèle pour couvrir les tranches standardisées est assez proche des deltas calculés dans l'approche standard basée sur le modèle à un facteur gaussien. Les différences s'expliquent par

4. Les intensités peuvent être considérées comme nulles pour les noms qui ont fait défaut.

5. Grâce à l'hypothèse de défauts non groupés.

le fait que, contrairement à l'approche standard, le modèle de contagion capture une augmentation de la corrélation entre les temps de défaut à l'arrivée d'un nouveau défaut.

Bien que le cadre proposé précédemment soit séduisant, il n'intègre pas de risque de spread spécifique. Dans l'article [Cousin et Laurent \(2010\)](#), nous soulignons qu'une méthodologie analogue peut être développée pour analyser le problème de la couverture dans un modèle où le risque de spread et le risque de défaut sont gouvernés par un processus de diffusion multidimensionnelle. Il s'agit d'une extension à un cadre multidimensionnel du modèle structurel de [Black et Cox \(1976\)](#). Ce modèle structurel multidimensionnel a également été étudié par [Hull et al. \(2004\)](#) pour l'évaluation de tranches de CDO. Dans ce modèle, le défaut d'une obligation est défini comme le premier instant de franchissement d'une barrière par un mouvement brownien géométrique représentant la dynamique des actifs de l'émetteur. La dépendance entre les temps de défaut découle alors de la corrélation entre les actifs. Dans ce modèle, les flux des CDS et des tranches de CDO peuvent être assimilés à des options à barrière. La couverture d'une tranche peut ainsi être réalisée de manière parfaite par une stratégie auto-financée sur un portefeuille contenant le même nombre de CDS que de sources de risque brownienne. En remarquant que la dynamique de ces options est markovienne, leur prix peut être obtenu en résolvant un système d'EDP (équations différentielles aux dérivées partielles) donné par le théorème de Feynman-Kac. Même si le prix des CDS peut être obtenu facilement dans ce cadre, le calcul du prix des tranches de CDO ne pourra se faire que par simulations de Monte Carlo, étant donné la dimension du problème. Cependant, il est intéressant de remarquer que, lorsque la corrélation entre les actifs est homogène, ce modèle dynamique correspond, dans une version mono-périodique⁶, au modèle à un facteur gaussien sur lequel repose l'approche standard de marché en matière d'évaluation et de couverture de tranches de CDO⁷. Il ne serait donc pas étonnant si les stratégies de couverture données par le modèle structurel dynamique étaient proches des deltas obtenus par l'approche standard de marché mais cela reste à vérifier. À l'inverse du modèle de contagion décrit précédemment, c'est le risque de spread qui gouverne ici entièrement le risque de défaut. Les temps de défaut sont des temps d'arrêt prévisibles par rapport à la filtration brownienne et ne constituent donc pas de sources de risque additionnelles. Ainsi, l'approche structurelle définit un cadre de marché complet pour la couverture du risque de spread. En ce sens, il s'agit d'une approche duale par rapport au modèle de contagion présenté précédemment.

Ces deux approches duales peuvent être considérées comme des modèles de référence ou des cas d'école dans la mesure où ils permettent de répondre de manière simple et élégante au problème théorique de la couverture. Cependant, ils correspondent chacun à une situation extrême d'imbrication entre risque de défaut et risque de spread. Lorsque les risques de spread et les risques de défaut ne sont plus gouvernés par les mêmes facteurs de risque, la complétude du marché pourrait être préservée en considérant davantage de produits de couverture, comme par exemple des CDS offrant deux maturités de protection différentes. Il est également possible d'utiliser des méthodes de couverture en marché incomplet en identifiant la stratégie qui minimise un critère d'erreur de couverture.

Les stratégies de couverture construites dans un cadre de marché complet à l'aide de portefeuilles autofinancés sont habituellement étudiés dans un contexte théorique, et lorsqu'elles

6. La dynamique des risques est décrite sur une seule période

7. Par ailleurs, il a été constaté empiriquement par [Hull et al. \(2004\)](#) et [Cousin et Laurent \(2008a\)](#) que, les structures de dépendance (entre les temps de défaut) sont très similaires dans ces deux modèles.

sont appliquées en pratique pour effectivement couvrir des positions de marché, n'ont aucune raison de conduire à la duplication parfaite des payoff promis. Cela serait le cas si, la dynamique des risques décrite dans le modèle était parfaitement conforme d'un point de vue statistique à celle observée sur le marché. En pratique, les paramètres associés aux modèles de couverture sont re-calibrés régulièrement et les stratégies de couverture sont construites à partir de calcul de sensibilités aux paramètres du modèle. Un modèle peut être considéré comme mal spécifié s'il n'est pas possible de trouver des paramètres qui le rendent conforme aux prix de marché ou si les paramètres calibrés fluctuent significativement d'une date de cotation à une autre. Dans ce dernier cas, la dynamique décrite par le modèle sera trop éloignée de la réalité pour fournir de bonnes performances de couverture. Cela ne veut pas dire que les modèles financiers sont inutiles pour la couverture : des études empiriques tendent à montrer que la couverture des risques basées sur des modèles calibrés réduit bien mieux les risques qu'avec des approches purement statistiques. Dans la section suivante, nous poursuivons la présentation de nos résultats dans le cadre d'une discussion sur la performance des stratégies de couverture.

1.2.2 Performance des stratégies de couverture

Les méthodes de couverture employées par les intervenants de marché dans le but de gérer les risques associés aux tranches de CDO sont relativement simples. Étant donné un outil d'évaluation comme le modèle à un facteur gaussien couplé à une structure de *base correlation*, il s'agit de calculer des sensibilités au prix des tranches par rapport à des données ou des paramètres de marché, tels que les spreads de crédit des entités du portefeuille sous-jacent. Ces sensibilités ou ratios de couverture permettent d'établir les montants nominaux des positions prises sur les entités du portefeuille de couverture. Par exemple, si l'on souhaite couvrir le risque de spread d'une vente de protection⁸ sur une tranche de CDO, des achats de protection⁹ sont effectués sur les CDS sous-jacents pour un montant égal au ratio de couverture correspondant. Habituellement, ces positions sont mises à jour sur une base quotidienne ou hebdomadaire. Le calcul des nouveaux ratios de couverture est réalisé dans un modèle re-calibré sur les cotations de marché courantes afin de prendre en compte d'éventuels changements dans la structure des risques sous-jacents. Le principal intérêt de cette méthode est de compenser localement l'effet des petites fluctuations des spreads de crédit. Notons que cette pratique de marché n'est pas dénuée de tout fondement théorique puisque, comme discuté dans la section précédente, le modèle à un facteur gaussien peut être vu comme une version mono-périodique ou statique d'un modèle structurel dynamique qui est complet pour la couverture du risque de spread. Quant au risque de défaut, il fait l'objet d'un traitement spécifique et est couvert habituellement au moyen d'une politique de réserve.

En conséquence, le risque de spreads dit du "premier ordre", est couvert localement par les CDS constituant l'indice mais peut également être couvert par l'indice lui-même lorsque le risque idiosyncratique ne semble pas trop élevé. D'autres risques dits du "second ordre", tels que le risque gamma idiosyncratique, le risque gamma systématique¹⁰ ou le risque de corrélation peuvent être contrôlés en combinant différentes tranches liquides de CDO sur in-

8. Position longue en corrélation.

9. Position courte en corrélation.

10. Risque de dérive des performances des ratios de couverture lorsque l'on cherche à répliquer l'évolution des valeurs de marché d'une tranche de CDO avec les CDS individuels sous-jacents (risque gamma idiosyncratique) ou avec l'indice (risque gamma systématique).

dice. [Petrelli et al. \(2007\)](#) effectuent une analyse méticuleuse des stratégies les plus populaires concernant la couverture des tranches de CDO par des techniques basées sur de petits écarts de spreads. Ils montrent en particulier que ces méthodes de couverture peuvent conduire à des résultats inattendus compte tenu de la complexité de la dynamique de la perte agrégée. [Patel \(2007\)](#) met également en évidence des problèmes similaires. D'autres anomalies relatives aux pratiques de marché concernant la couverture des CDO sont répertoriées dans l'article de [Cousin et Laurent \(2010\)](#).

Il existe en fait deux approches lorsque l'on s'intéresse à la couverture locale du risque de spread avec un modèle à facteur gaussien couplé à une structure de *base correlation* : la règle *sticky strike* et la règle *sticky delta*¹¹. Dans l'approche *sticky strike*, la structure de *base correlation* n'est pas modifiée à la suite de l'écart effectué sur la courbe des spreads de crédit tandis que l'approche *sticky delta* met à jour la structure de *base correlation* et prend donc en compte le changement de la *moneyness* de la tranche. Par exemple, la tranche *equity* devient plus *junior* lorsque les spreads augmentent, ce qui tend à diminuer le paramètre de corrélation implicite correspondant. Ainsi, pour cette tranche, le ratio de couverture *sticky delta* est inférieur à celui calculé selon la règle *sticky strike*. Étant donnée la séparation naturelle entre lois marginales et structure de dépendance dans les modèles basés sur des fonctions copules, la mise à jour de la structure de *base correlation* dans le calcul des *deltas* relève nécessairement d'un choix arbitraire¹². C'est pourquoi l'approche standard pour la couverture du risque de spread correspond à la règle *sticky strike*. Ainsi, dans le modèle à un facteur gaussien, des changements sur les spreads de crédit n'affectent aucunement la corrélation entre les défauts. Cependant, comme illustré dans les articles [Cousin et al. \(2011\)](#) et [Cousin et al. \(2012a\)](#), la corrélation implicite (base correlation) et les spreads d'indice peuvent être fortement corrélés. Il se peut donc qu'un modèle dynamique de crédit susceptible de capturer cette dépendance entre corrélation et spreads – comme le modèle à intensité locale – donne de meilleur résultat en matière de couverture.

Dans l'article [Cousin et al. \(2012a\)](#), nous avons analysé la performance de différentes stratégies pour couvrir une tranche standardisée sur indice en utilisant comme instruments de couverture l'indice sous-jacent et l'actif sans risque. Dans ce contexte, nous avons comparé des stratégies de couverture construites suivant l'approche standard de marché décrite ci-dessus et les stratégies construites dans le modèle à intensité locale. Rappelons que l'approche standard de marché consiste à couvrir localement le risque de spread en calculant un ratio de couverture aussi appelé *spread delta*. Ce dernier est défini comme le ratio entre le changement en valeur de la tranche et le changement en valeur de l'indice sous-jacent par rapport à une petite augmentation du spread d'indice (1bp habituellement), en supposant une structure de *base correlation* constante (règle *sticky strike*). Par ailleurs, rappelons que le modèle à intensité locale est un modèle dynamique de contagion de défauts qui est complet pour la couverture du risque de défaut. Les stratégies de couverture données dans ce modèle s'expriment comme des *jump-to-default deltas*. Ces derniers sont définis comme le ratio entre le changement en valeur de la tranche et le changement en valeur de l'indice par rapport à l'arrivée d'un nouveau défaut. Notre étude empirique est basée sur les cotations journalières des tranches standardisées et de

11. La terminologie est empruntée au marché des dérivés sur actions et apparaît dans la littérature avec [Derman \(1999\)](#).

12. Il existe de ce fait plusieurs techniques traitant ce problème. Nous renvoyons le lecteur à [Jobst \(2007\)](#) et [Meissner et al. \(2008\)](#) pour une discussion plus détaillée des méthodes de couverture des tranches de CDO dans le cadre de la copule gaussienne.

l'indice pour les séries *on-the-run* 5, 9 et 10 de l'indice CDX.NA.IG de maturité 5 ans. Comme en témoigne la Figure 1.2 qui représente l'évolution des spreads d'indice pour ces séries, les données exploitées recouvrent différents régimes de marché. La série 5 associée à la période du 20 septembre 2005 au 20 mars 2006 correspond à un régime calme ou normale de marché. La série 9 associée à la période du 20 septembre 2007 au 20 mars 2008 est caractérisée par une forte volatilité et une augmentation très importante des spreads d'indice alors que, pour la série 10 associée à la période du 21 mars 2008 au 20 septembre 2008, les spreads d'indice se maintiennent à un niveau très élevé. Les séries 9 et 10 correspondent donc à des régimes de crise systémique. Les ratios de couverture, *spread deltas* dans le modèle à un facteur gaussien

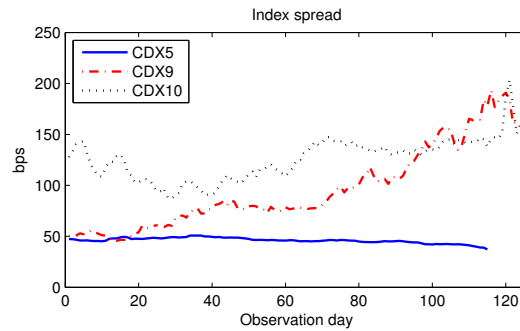


FIGURE 1.2 – Spreads des séries 5, 9 et 10 de l'indice CDX.NA.IG 5 ans

(Gauss) et *jump-to-default deltas* dans le modèle à intensité locale ont été calculés à chaque date de cotation en re-calibrant les modèles sur les cotations courantes de marché. Pour le modèle à intensité locale, deux spécifications des intensités ont été considérées : une forme homogène en temps et linéaire par morceaux (Para) et une forme non-paramétrique calibrée par minimisation d'une distance entropique (EM). Les deltas obtenus pour la tranche *equity* sont représentés à la Figure 1.3.

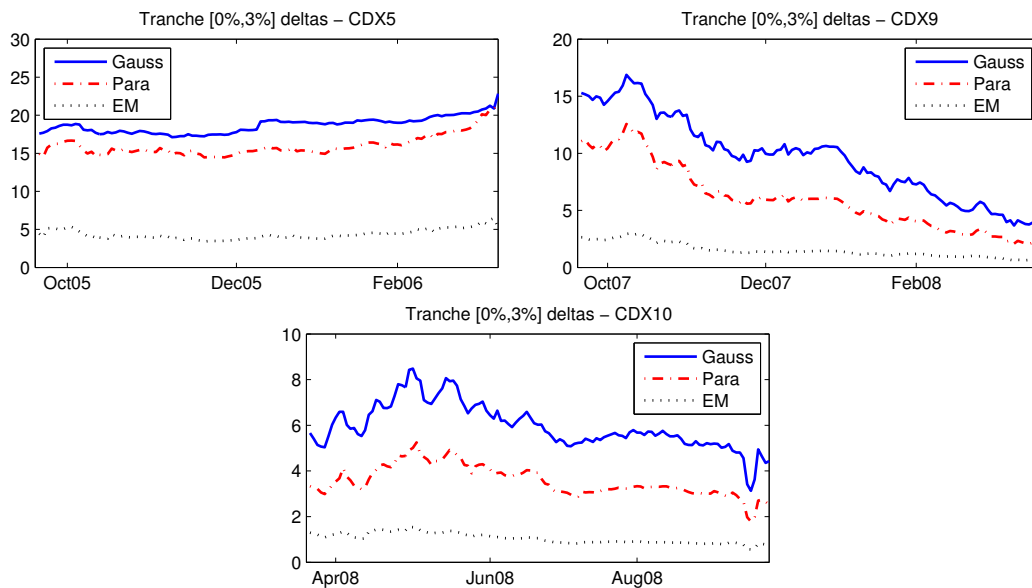


FIGURE 1.3 – Deltas de la tranche *equity* pour les séries 5, 9 et 10 de l'indice CDX.NA.IG.

Les stratégies de couverture ont ensuite été back-testées sur l'ensemble de l'échantillon en déterminant pour chacune d'elles la trajectoire associée du portefeuille de couverture. La Figure 1.4 représentent les trajectoires du portefeuille de couverture (P&L cumulé) dans les différentes approches pour la tranche *equity* [0%,3%] et la tranche *senior* [15%,30%].

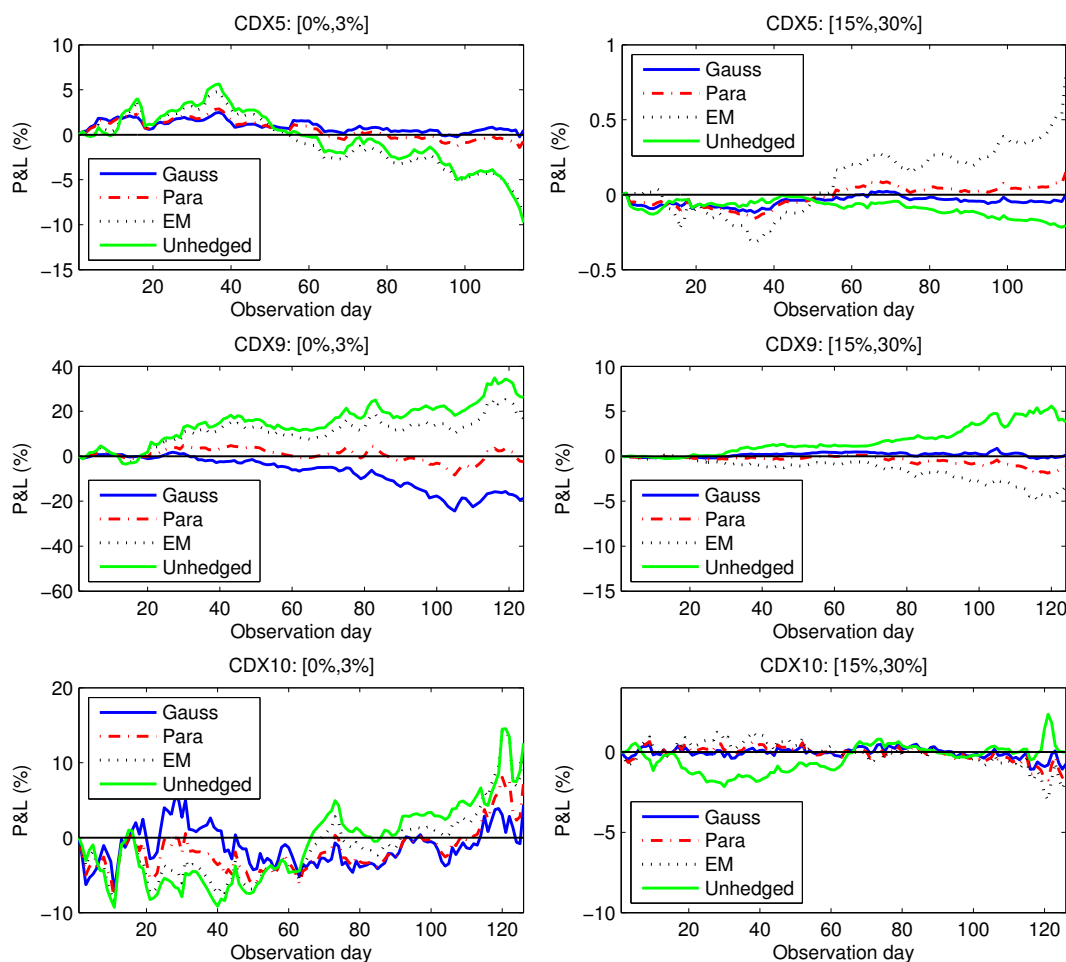


FIGURE 1.4 – Trajectoire du P&L cumulé avec et sans couverture des positions sur les tranches [0%,3%] et [15%,30%]. Ces trajectoires (en pourcentage du montant nominal investi) ont été obtenues à partir d'un rebalancement journalier du portefeuille de couverture.

Les résultats de cette étude peuvent être synthétisés de la manière suivante :

1. Une fois calibrés, tous les modèles considérés reproduisent bien les cotations de marché : les erreurs de calibration sont très faibles à chaque date.
2. Bien que les deux spécifications du modèle à intensité locale reproduisent bien les mêmes données de marché, les stratégies de couverture qui en résultent sont très différentes (voir Figure 1.3). Par ailleurs, l'approche basée sur une calibration non-paramétrique des intensités (EM) donne de mauvais résultats comparés à ceux des autres approches étudiées (voir Figure 1.4).
3. Avant la crise des subprimes (serie 5), les stratégies données par le modèle à un facteur gaussien (*spread deltas*) offrent de meilleures performances de couverture que les stratégies issues du modèle à intensité locale (*jump-to-default deltas*) dans ses deux

versions. Pendant la crise (séries 9 et 10), les performances de l’approche *spread deltas* et de l’approche *jump-to-default deltas* dans sa version paramétrique (Para) sont comparables.

Ainsi, même si les stratégies de couverture associées au modèle à intensité locale peuvent être justifiées théoriquement par des arguments de duplication, ces stratégies ne capturent pas dans toutes les situations de marché la dynamique jointe des spreads d’indice et de la structure de corrélation.

1.2.3 Couverture dynamique dans un modèle bottom-up à chocs communs

Dans l’étude empirique présentée à la section précédente, nous nous sommes concentrés sur la couverture de tranche de CDO en utilisant l’indice CDS comme principal instrument de couverture. Comme illustré dans [Cont et Kan \(2011\)](#) et [Cousin et al. \(2012a\)](#), une couverture des tranches par l’indice ne produit pas toujours de résultats satisfaisants. En effet, lorsque les spreads des constituants de l’indice sont très dispersés, il peut être intéressant de couvrir une tranche au niveau individuel, en utilisant des CDS référant des noms particuliers de l’indice. Par exemple la dynamique d’une tranche *equity* est susceptible d’être fortement corrélée à la dynamique des CDS qui ont le niveau de spread le plus élevé, i.e., ceux qui ont une probabilité plus importante de faire défaut en premier et ainsi, de générer des flux de protection sur cette tranche. Par construction, les modèles *bottom-up* et, en particulier, les modèles basés sur des fonctions copules peuvent servir à calculer des ratios de couverture par rapport à des CDS individuels. A l’inverse, les approches top-down pour lesquelles la dynamique de la perte agrégée est directement spécifiée ne permettent pas de calculer des deltas individuels¹³. C’est le cas par exemple du modèle à intensité local décrit précédemment.

Dans les articles [Bielecki et al. \(2014a\)](#), [Bielecki et al. \(2014b\)](#), [Bielecki et al. \(2014d\)](#) nous avons proposé un nouveau modèle *bottom-up* dans lequel il est possible de mettre en œuvre des stratégies de couverture individuelles établies dans un véritable cadre de modélisation dynamique (contrairement aux modèles basés sur des fonctions copules qui sont purement statiques). Dans ce modèle, les indicatrices de défaut forment une chaîne de Markov représentant l’évolution des états de défaut dans le portefeuille. En toute généralité, cette chaîne de Markov comporte 2^n états de défaut possibles pour un portefeuille avec n noms. Dans cette approche, la dépendance entre les temps de défaut découle de la possibilité de défauts simultanés. Une entité peut subir un défaut isolé ou peut faire défaut en même temps que d’autres entités appartenant à un même groupe. Afin de réduire la dimension du problème, les ensembles d’entités pouvant faire défaut de manière simultanée sont en nombre limité. Notons que l’arrivée de défauts simultanés peut être interprétée comme un phénomène de contagion extrême associé à une augmentation soudaine et infinie des intensités des noms du groupe. L’innovation dans ce travail repose sur le fait que les intensités de passage d’un état de la chaîne à un autre peuvent être spécifiées de sorte que chaque constituant du processus de défaut (i.e., chaque indicatrice de défaut) soit lui-même un processus de Markov (dans sa propre filtration). Cette propriété appelée *Markov copula* est cruciale d’un point de vue pratique car, conditionnellement à l’information courante, les probabilités de défaut individuelles (ou mar-

13. Des approches basées sur des techniques de random thinning ont été proposées notamment par [Giesecke et Goldberg \(2006\)](#) et [Halperin et Tomecek \(2008\)](#) pour calculer des stratégies de couverture individuelles dans un modèle top-down. A ma connaissance, aucune étude n’a pu conclure quant à leur performance en terme de couverture.

ginales) ne dépendent, dans ce cas, que de l'état courant de défaut du nom en question. Cela permet de calibrer les paramètres du modèle de la même manière que pour un modèle basé sur une fonction copule : la procédure d'estimation des paramètres peut être divisée en deux étapes. Dans la première étape, les intensités de défaut individuelles sont calibrées de manière indépendante à partir des spreads de CDS observés. Dans la seconde étape, les paramètres de dépendance (les intensités des défauts joints) sont estimés en calibrant le modèle sur les cotations des tranches standardisées. Nous montrons par ailleurs qu'il est possible de construire un cadre *Markov copula* même lorsque les intensités de transition sont stochastiques et dépendent par exemple de facteurs macro-économiques. Cet environnement Markovien nous a permis d'étudier le problème de la couverture dans un cadre dynamique. En particulier, nous nous sommes intéressés à la couverture d'une tranche de CDO avec un portefeuille composé de quelques CDS sous-jacents. Dans ce cadre de marché incomplet, il nous a été possible d'identifier les stratégies dynamiques de couverture qui minimisent un critère d'erreur quadratique.

Une autre contribution de ce travail a consisté à montrer que, conditionnellement à la filtration du modèle (état courant des défauts et des facteurs gouvernant les intensités), la structure de dépendance des temps de défaut est caractérisée par une fonction copule de type Marshall-Olkin. Il en découle une représentation des défauts à l'aide d'un modèle à chocs communs (modèle à facteur) qui permet de construire un algorithme récursif pour le calcul de la distribution de la perte agrégée. Ainsi, l'évaluation des tranches de CDO et le calcul des stratégies de couverture peuvent se faire très efficacement dans ce cadre de modélisation dynamique et *bottom-up*. Ce résultat nous a permis de calibrer les paramètres du modèle à la fois sur les courbes de crédit individuelles et sur les cotations des tranches standardisées et d'analyser les stratégies de couverture obtenues dans le modèle préalablement calibré. La calibration du modèle a été testée sur deux jeux de données. Le premier correspond aux cotations des constituants et des tranches de l'indice CDX.NA.IG au 17 décembre 2007. Le second correspond aux mêmes types de cotations de marché mais pour l'indice iTraxx Europe au 31 mars 2008. Comme nous pouvons l'observer à la Figure 1.5, les spreads de CDS des constituants de ces indices sont assez dispersés à ces deux dates.

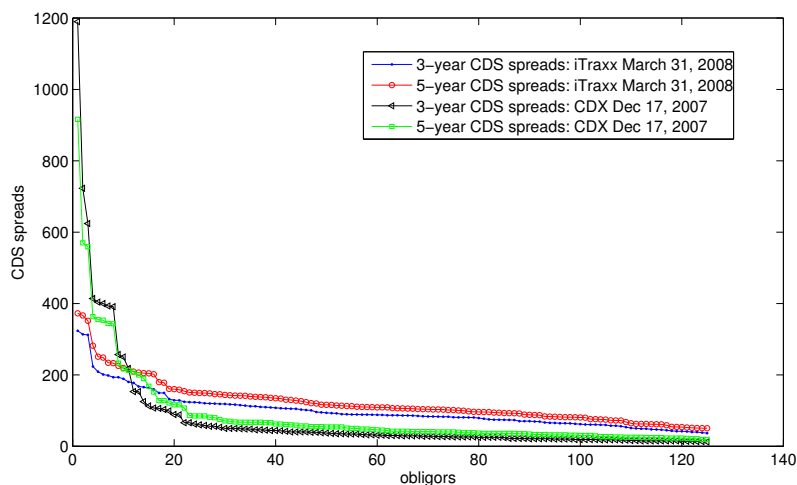


FIGURE 1.5 – Spreads des CDS de maturité 3 et 5 ans associés aux 125 constituants de l’indice CDX.NA.IG au 17 décembre 2007 et de l’indice iTraxx Europe main au 31 mars 2008. Les spreads de CDS ont été préalablement rangés dans l’ordre décroissant, i.e., du CDS le plus risqué au CDS le moins risqué.

Une fois les intensités marginales de défaut estimées pour chaque nom à partir des primes de CDS données à la Figure 1.5, nous avons dans une seconde étape calibré les intensités des chocs communs sur les spreads des tranches. La spécification des groupes de défauts simultanés a été faite en ordonnant les noms par niveau de risque décroissant et en considérant des ensembles emboîtés dont la perte totale correspondrait aux points de détachement des tranches standardisées. Comme en témoigne la Table 1.3, la calibration des intensités de défauts joints a donné de très bons résultats pour ces deux jeux de données. La Figure 1.6 représente les stratégies de couverture des tranches de CDO avec les quelques noms les plus risqués du portefeuille. Les quatre graphiques permettent d’observer l’évolution de la composition du portefeuille de couverture lorsqu’un nom supplémentaire est considéré. Notons que l’axe des abscisse est inversé au sens où les spreads sont ordonnés suivant un ordre décroissant. Les valeurs en ordonnée correspondent au montant nominal de CDS qu’il est nécessaire de contracter pour couvrir un montant nominal d’une unité monétaire sur une tranche. Dans [Bielecki et al. \(2014b\)](#), nous avons présenté les valeurs des stratégies de couverture obtenues en considérant davantage de CDS comme instruments de couverture.

Ainsi, des stratégies de couverture individuelles ont pu être établies dans un véritable cadre de modélisation dynamique et *bottom-up*. Par ailleurs, ce modèle est capable de reproduire parfaitement à la fois les distributions marginales de défaut mais également la structure de dépendance telles que reflétées par les cotations de marché. Tous ces éléments combinés constituent une contribution par rapport aux autres approches étudiées dans la littérature. Par ailleurs, dans l’article [Bielecki et al. \(2014c\)](#), nous avons proposé une extension du cadre de modélisation à des taux de recouvrement aléatoires et des intensités de défaut stochastiques. La prise en compte de taux de recouvrement stochastiques a permis d’améliorer significativement les résultats de calibration pour les tranches *senior* en période de crise. D’autre part, le caractère stochastique des spreads de crédit a une grande importance pour la gestion du risque

de contrepartie. Notons que ce cadre de modélisation a été utilisé notamment par [Assefa et al. \(2011\)](#) et [Bielecki et al. \(2012\)](#) pour étudier le risque de contrepartie associé à des portefeuilles de crédit.

CDX 2007-12-17					
Tranche	[0, 3]	[3, 7]	[7, 10]	[10, 15]	[15, 30]
Market spread	48.07	254.0	124.0	61.00	41.00
Model spread	48.07	254.0	124.0	61.00	38.94
Absolute error in bp	0.010	0.000	0.000	0.000	2.061
Relative error in %	0.0001	0.000	0.000	0.000	5.027

iTraxx Europe 2008-03-31					
Tranche	[0, 3]	[3, 6]	[6, 9]	[9, 12]	[12, 22]
Market spread	40.15	479.5	309.5	215.1	109.4
Model spread	41.68	429.7	309.4	215.1	103.7
Absolute error in bp	153.1	49.81	0.0441	0.0331	5.711
Relative error in %	3.812	10.39	0.0142	0.0154	5.218

TABLE 1.3 – Résultat de calibration. La tranche $[0, 3]$ est cotée upfront en %. Toutes les tranches ont une maturité de 5 ans.

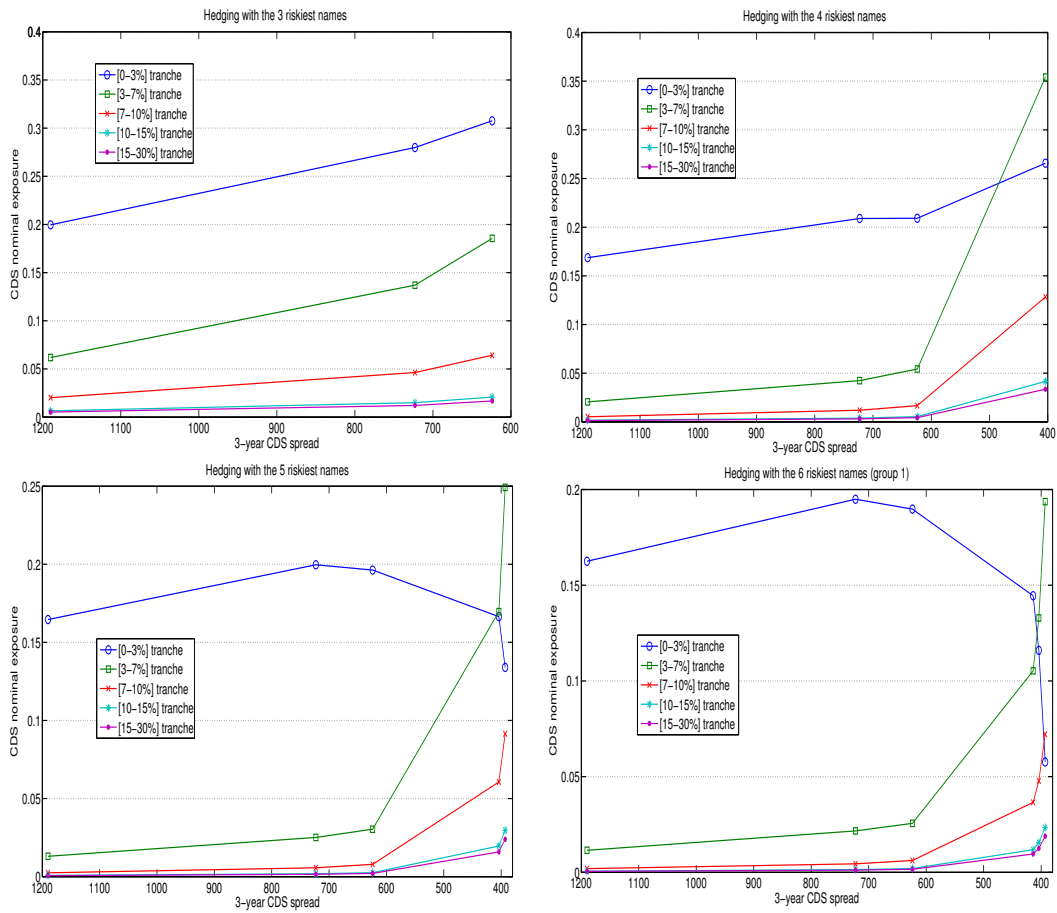


FIGURE 1.6 – Stratégie de couverture des tranches de l'indice CDX.NA.IG en utilisant les d CDS les plus risqués, $d = 3, 4, 5, 6$ dans le modèle calibré sur les cotations de cet indice au 17 décembre 2007

Chapitre 2

Quantification des risques et incertitude inhérente à leur modélisation

Indépendamment des modèles probabilistes utilisés pour décrire les risques, la construction d'outils de mesure de risque est centrale pour établir des décisions d'investissement ou pour définir des règles garantissant la solvabilité des institutions financières. Suite à l'introduction de la Value-at-Risk (VaR) qui s'est imposée comme une mesure de risque de référence¹, l'article de [Artzner et al. \(1999\)](#) a introduit des axiomes pour la construction de mesures de risque dites cohérentes. Une large littérature s'est ensuite développée sur le sujet, comme en témoigne le livre de [Denuit et al. \(2005\)](#). Cependant, de manière générale, la quantification des risques repose sur des hypothèses inhérentes à leur modélisation probabiliste ou statistique. Ainsi, le choix d'un modèle, le choix d'une méthode d'estimation de paramètres, le choix de données historiques ont naturellement un impact sur l'évaluation des risques et, in fine, sur les décisions qui en découlent. Dans des situations où l'information disponible est insuffisante (ou peu fiable) et où la nature probabiliste des risques sous-jacents est mal connue, les modèles de gestion utilisés ont un risque significatif d'être mal spécifiés ou mal estimés. Cette incertitude sur la distribution des risques est exacerbée lorsque le risque est à évaluer sur un horizon temporel lointain. Ce concept de risque de modélisation peut être relié à celui d'incertitude radicale successivement étudié par [Knight \(1921\)](#) et [Keynes \(1937\)](#). Dans le cas extrême où aucune observation ou aucune connaissance ne permet d'apporter de l'information sur la distribution des risques, nous sommes en présence d'une incertitude radicale qu'il n'est pas possible de décrire par un modèle probabiliste et donc d'évaluer de manière objective. Les acteurs économiques sont alors conduits à prendre des décisions sur la base d'opinions personnelles. Dans la réalité, les processus de gestion des risques s'appuient sur des modèles estimés ou calibrés à partir des prix observés d'actifs liquides². Cependant, même si ces prix traduisent à un instant donné la vision des acteurs du marché sur les risques sous-jacents, ils ne fournissent qu'une information partielle et incomplète sur la distribution de ces deniers. Il est donc important de développer des méthodes de quantification et de contrôle des risques capables de prendre en compte l'incertitude qui résulte inévitablement de leur estimation.

1. La VaR donne le montant des pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné.

2. Suffisamment liquide pour que le prix reflète un consensus de marché et donc apporte une information fiable sur la distribution du risque sous-jacent.

Ce chapitre a pour but de présenter deux groupes de travaux. Le premier concerne la construction de mesures de risque pour des problèmes multidimensionnels. Le second traite de l'analyse de l'incertitude inhérente à la modélisation des risques financiers et en particulier, celle qui résulte de la construction de courbes de taux ou de crédit.

2.1 Mesures de risque multidimensionnelles

Suite aux récentes crises financières, de nombreux travaux dans la littérature se sont intéressés à la quantification des risques dans un cadre multidimensionnel, et en particulier à la construction d'indicateurs de risque prenant en compte les effets d'interdépendance (corrélation, phénomène de contagion, dépendance des risques extrêmes) entre les risques. Un problème qui a particulièrement attiré l'attention du régulateur, des autorités de supervision et du milieu académique est l'étude du risque systémique et la construction de méthodes qui permettent de quantifier, de prédire et de contrôler ce risque. A ce titre, nous avons proposé dans [Cousin \(2015\)](#) une discussion basée sur l'article de [de Bandt et al. \(2015\)](#) qui dresse une revue de la littérature en matière d'estimation du risque systémique. Dans ce contexte, les mesures de risque comme la MES (Marginal Expected Shortfall) ou la CoVaR (conditional VaR) ont pour but d'identifier les institutions les plus vulnérables à une crise systémique ou, à l'inverse, celles qui sont le plus susceptibles de contribuer au risque systémique. La construction de telles mesures repose sur des hypothèses d'interdépendance entre les risques portés par les institutions financières. Une autre situation où des mesures de risque multidimensionnelles sont utilisées est celle d'une institution financière qui souhaite définir des règles d'allocation de capital économique entre ces différentes branches d'activités ou métiers. Ces règles permettent d'identifier la contribution d'une branche au capital économique global de l'institution. Par exemple, la règle d'allocation d'Euler (ou de Aumann-Shapley) décrite dans [Scaillet \(2004\)](#) ou [Tasche \(2008\)](#) permet de calculer ces contributions lorsque le risque global est établi au moyen d'une mesure de risque homogène de degré 1 comme la VaR ou la CTE. Ces règles reposent fortement sur les hypothèses d'interdépendance entre les risques portés par les branches d'activités. En particulier, la contribution d'une branche sera d'autant plus faible (par rapport à son risque intrinsèque) que cette dernière contribue à la diversification du risque au niveau agrégé.

Cependant, ces méthodes de quantification des risques ne sont pas adaptées pour traiter des problèmes intrinsèquement multidimensionnels où les risques sont de nature hétérogène et ne peuvent donc pas être agrégés ni même comparés. C'est le cas par exemple lorsque les risques en jeu ne s'expriment pas dans la même unité de mesure (risques non monétaires, risque de santé, risque de réputation, etc ...). C'est également le cas en présence de risques exogènes ou lorsque qu'il n'est pas possible d'agréger les risques. Dans [Cousin et Di Bernardino \(2013\)](#) et [Cousin et Di Bernardino \(2014\)](#), nous avons introduit et analysé deux extensions de la Value-at-Risk et deux extensions de la Conditional-Tail-Expectation à un cadre multidimensionnel. Les mesures proposées reposent sur des généralisations de la notion de quantile pour des vecteurs aléatoires. Notons que dans un cadre unidimensionnel, l'existence d'une relation d'ordre totale permet d'ordonner la réalisation des risques sans ambiguïté. Ce n'est pas le cas dans un cadre multidimensionnel. Il existe ainsi plusieurs manières de définir des quantiles suivant la relation d'ordre (partielle) retenue. La construction de nos mesures de risque s'appuie sur les définitions de quantile proposées par [Embrechts et Puccetti \(2006\)](#) et qui correspondent, pour un vecteur

de pertes aléatoires, aux courbes de niveau de la fonction de répartition jointe ou celles de la fonction de survie. Ainsi, nous proposons de définir la *lower-orthant Value-at-Risk* et la *upper-orthant Value-at-Risk* de la manière suivante. La *lower-orthant Value-at-Risk* du vecteur de pertes $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ au niveau de risque α , notée $\underline{\text{VaR}}_\alpha(\mathbf{X})$, est définie comme l'espérance du vecteur \mathbf{X} sachant que ce dernier est situé sur la courbe de niveau α de sa fonction de répartition jointe F . De manière analogue, la *upper-orthant Value-at-Risk* du vecteur de perte \mathbf{X} au niveau α , notée $\overline{\text{VaR}}_\alpha(\mathbf{X})$, est définie comme l'espérance conditionnelle de \mathbf{X} sachant que ce dernier est situé sur la courbe de niveau $(1 - \alpha)$ de sa fonction de survie \overline{F} . Plus formellement,

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(\mathbf{X}) := \mathbb{E}[\mathbf{X} | F(\mathbf{X}) = \alpha] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1 | F(\mathbf{X}) = \alpha] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d | F(\mathbf{X}) = \alpha] \end{pmatrix},$$

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(\mathbf{X}) := \mathbb{E}[\mathbf{X} | \overline{F}(\mathbf{X}) = 1 - \alpha] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1 | \overline{F}(\mathbf{X}) = 1 - \alpha] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d | \overline{F}(\mathbf{X}) = 1 - \alpha] \end{pmatrix}.$$

Notons que, tout comme dans le cas unidimensionnel, les extensions de la VaR que nous avons proposées ne prennent pas en compte les parties extrêmes de la distribution jointe. Nous avons alors proposé d'étendre de manière analogue la *Conditional-Tail-Expectation* en moyennant les risques au-delà de la courbe quantile considérée, ce qui donne les définitions ci-dessous pour la *lower-orthant Conditional-Tail-Expectation* et la *upper-orthant Conditional-Tail-Expectation* :

$$\underline{\text{CTE}}_\alpha(\mathbf{X}) := \mathbb{E}[\mathbf{X} | F(\mathbf{X}) \geq \alpha] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1 | F(\mathbf{X}) \geq \alpha] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d | F(\mathbf{X}) \geq \alpha] \end{pmatrix},$$

$$\overline{\text{CTE}}_\alpha(\mathbf{X}) := \mathbb{E}[\mathbf{X} | \overline{F}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1 | \overline{F}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d | \overline{F}(\mathbf{X}) \leq 1 - \alpha] \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les mesures de risque introduites transforment un vecteur de risques \mathbf{X} en un vecteur de \mathbb{R}^d de même dimension. Cela permet de synthétiser l'information contenue dans la distribution jointe de \mathbf{X} de manière beaucoup plus concise que les quantiles proposés par [Embrechts et Puccetti \(2006\)](#) qui s'expriment en fonction d'une infinité de points. Cette propriété est importante d'un point de vue pratique puisqu'elle permet de simplifier la comparaison entre vecteurs de risque, et à ce titre, de faciliter la mise en œuvre de règles de décision. Par ailleurs, il est assez facile de remarquer que dans le cas unidimensionnelle ($d = 1$), les deux extensions de la VaR (resp. de la CTE) proposées coïncident parfaitement avec la VaR classique (resp. la CTE classique).

Les mesures de risque introduites ont été analysées dans plusieurs directions. Nous avons d'abord montré que ces dernières sont compatibles avec des extensions multidimensionnelles des axiomes [Artzner et al. \(1999\)](#). Ainsi, ces mesures vérifient la propriété d'homogénéité positive et d'invariance par translation. Ces mesures sont également additives pour des couples

π -comonotones de vecteurs aléatoires³. Nous avons par ailleurs comparé les composantes de ces mesures avec leur version unidimensionnelle. Il en résulte que les composantes de la *lower-orthant Value-at-Risk* (resp. *upper-orthant Value-at-Risk*) sont plus conservatrices (resp. moins conservatives) que la VaR de chaque composante au sens classique. C'est le cas également pour la *lower-orthant CTE*. De plus, dans le cas où le vecteur de risques est comonotone, toutes les composantes de ces mesures de risque coïncident avec leur version unidimensionnelle.

Un des avantages de ces mesures de risque est qu'elles peuvent être calculées explicitement lorsque le vecteur des risques admet une structure de dépendance caractérisée par une copule archimédienne ou une copule de survie archimédienne. Ce résultat repose sur une représentation des copules archimédiennes récemment introduite dans [McNeil et Nešlehová \(2009\)](#). Par exemple, considérons un couple de risques (X, Y) dont les composantes sont uniformément distribuées et qui admet comme structure de dépendance une copule de Clayton bivariée avec un générateur φ donné par

$$\varphi(u) = \frac{1}{\theta} (u^{-\theta} - 1), \quad u \in (0, 1)$$

où θ est un paramètre de dépendance. Dans ce cas, comme le vecteur de risque (X, Y) est échangeable, les mesures de risque associées précédemment introduites auront des composantes identiques. Considérons également un couple de risques (\tilde{X}, \tilde{Y}) de marginales uniformes mais qui a pour copule de survie la copule de Clayton avec le même générateur. Les composantes de la *lower-orthant Value-at-Risk* $\underline{\text{VaR}}_{\alpha, \theta}^i(X, Y)$, $i = 1, 2$ et de la *upper-orthant Value-at-Risk* $\overline{\text{VaR}}_{\alpha, \theta}^i(\tilde{X}, \tilde{Y})$, $i = 1, 2$, sont données dans la Table 2.1. La famille des copules de Clayton

Copula	θ	$\underline{\text{VaR}}_{\alpha, \theta}^i(X, Y)$	$\overline{\text{VaR}}_{\alpha, \theta}^i(\tilde{X}, \tilde{Y})$
Clayton C_θ	$(-1, \infty)$	$\frac{\theta}{\theta-1} \frac{\alpha^\theta - \alpha}{\alpha^{\theta-1} - 1}$	$1 - \frac{\theta}{\theta-1} \frac{(1-\alpha)^\theta - (1-\alpha)}{(1-\alpha)^{\theta-1} - 1}$
Anti-comonotonicité	-1	$\frac{1+\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$
Indépendance	0	$\frac{\alpha-1}{\ln \alpha}$	$1 + \frac{\alpha}{\ln(1-\alpha)}$
Comonotonicité	∞	α	α

TABLE 2.1 – Composante de la *lower-orthant Value-at-Risk* et de la *upper-orthant Value-at-Risk* pour différentes structures de dépendance.

contient un certain nombre de structures de dépendance classiques comme l'indépendance, la comonotonicité ou l'anti-comonotonicité⁴. Notons par ailleurs qu'une augmentation du paramètre θ entraîne une augmentation des vecteurs aléatoires (X, Y) et (\tilde{X}, \tilde{Y}) selon l'ordre supermodulaire, un ordre stochastique multidimensionnel bien connu pour comparer le degré de dépendance⁵. Cela nous a conduit à analyser le comportement de ces mesures vis à vis du degré d'interdépendance du vecteur de risque. La Figure 2.1 donne une représentation des composantes de la *lower-orthant VaR* et de la *upper-orthant VaR* données à la Table 2.1.

3. Plusieurs approches existent pour étendre le concept de comonotonicité à un cadre multidimensionnel. Nos mesures de risque sont additives pour des couples comonotones de vecteurs aléatoires au sens de la π -comonotonicité. Pour une comparaison des différents concepts de comonotonicité, nous renvoyons le lecteur à l'article de [Puccetti et Scarsini \(2010\)](#).

4. Notons que le concept d'anti-comonotonicité n'a de sens qu'en dimension 2.

5. Une caractérisation de l'ordre supermodulaire pour des copules archimédiennes est donnée dans [Wei et Hu \(2002\)](#).

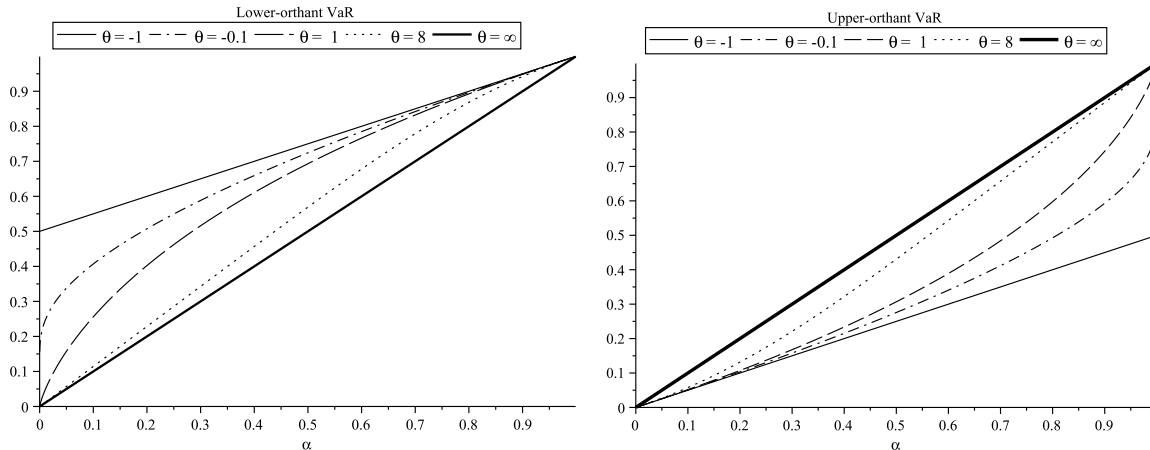


FIGURE 2.1 – Comportement de $\underline{\text{VaR}}_{\alpha,\theta}^1(X, Y) = \underline{\text{VaR}}_{\alpha,\theta}^2(X, Y)$ (gauche) et de $\overline{\text{VaR}}_{\alpha,\theta}^1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \overline{\text{VaR}}_{\alpha,\theta}^2(\tilde{X}, \tilde{Y})$ (droite) en fonction du niveau de risque α et pour différentes valeurs du paramètre de dépendance θ .

Nous pouvons constater sur la Figure 2.1 que les composantes de ces deux mesures sont bien croissantes avec le niveau de risque α . Par ailleurs, les composantes de la *lower-orthant VaR* diminuent avec le degré d’interdépendance. C’est l’inverse pour la *upper-orthant VaR*. Ces résultats ont été démontrés plus généralement pour toutes les mesures introduites (VaR et CTE) et pour toutes sortes de copules archimédiennes. Nous avons également analysé l’influence des distributions marginales sur ces mesures de risque. Nous constatons qu’une modification de la distribution marginal d’un risque n’affecte que la composante correspondante de la mesure considérée. D’autre part, une augmentation au sens de la dominance stochastique d’une composante particulière du vecteur des risques entraîne une augmentation de la composante associée de la mesure de risque. Ces propriétés sont également vérifiées par la VaR et la CTE classique (unidimensionnelle).

Dans [Cousin et Di Bernardino \(2014\)](#), nous avons montré que, si les composantes de la *lower-orthant VaR* sont bien croissantes avec le niveau de risque α , la *lower-orthant CTE* est, comme attendu, plus conservatrice que la *lower-orthant VaR*. Il en est de même pour la *upper-orthant VaR* et la *upper-orthant CTE*. Nous avons également vérifié que les deux extensions multidimensionnelles de la CTE étaient sous-additives pour des vecteurs aléatoires indépendants et dont les composantes sont indépendantes.

Ainsi, les mesures proposées constituent des extensions intéressantes de la VaR et de la CTE qui pourraient être utilisées pour des problèmes intrinsèquement multidimensionnels où les risques ne peuvent pas être agrégés. Contrairement à d’autres extensions multidimensionnelles où le risque mesuré correspond à un ensemble contenant une infinité de points, nos mesures quantifient le risque de manière plus synthétique par un vecteur de même dimension que le risque sous-jacent. Cette propriété est importante d’un point de vue pratique, notamment pour comparer les composantes de risques dans un environnement multidimensionnel. Cependant, ce travail a également soulevé des questions qui restent à explorer et qui constituent autant de perspectives de recherche. Il nous a été possible d’étudier le comportement de ces mesures dans le cas de structure de dépendance basée sur des fonctions archimédiennes.

Qu'en est-il lorsque d'autres classes de copules (comme les copules elliptiques) sont considérées ? La sous-additivité des CTE multidimensionnelles n'a été montrée que sous des hypothèses d'indépendances entre les risques. Qu'en est-il si ces hypothèses sont relâchées ? Par ailleurs, nos développements ont été menés sous certaines hypothèses de régularité (distribution jointe absolument continue). Est-il possible d'étendre la définition de ces mesures à des vecteurs de risques de loi discrète ? Dans ce cas, les propriétés que l'on a obtenues tiennent-elles toujours ? Sur ce point, le travail de [Lee et Prékopa \(2013\)](#) fournit quelques pistes.

2.2 Quelques contributions à l'étude du risque de modélisation

Suite aux crises financières de 2008-2010, d'importantes mises à jour du cadre réglementaire ([BIS \(2011\)](#), [Federal Reserve \(April 2011\)](#), [EBA \(November 2012\)](#)) ont été effectuées pour que les institutions financières prennent en compte leur risque de modèle, i.e., le risque de perte financière résultant de l'utilisation dans le processus de gestion de modèles inappropriés ou mal spécifiés. Les travaux académiques sur ce sujet ont été menés suivant différentes perspectives. Les articles [Avellaneda et al. \(1995\)](#), [Avellaneda et Paras \(1996\)](#), [Derman \(1996\)](#), [Rebonato \(2002\)](#), [Cont \(2006\)](#), [Denis et Martini \(2006\)](#), [Morini \(2011\)](#), [Soner et al. \(2011\)](#), [Jarrow \(2012\)](#), [Glasserman et Xu \(2013\)](#), [Glasserman et Xu \(2014\)](#), [Detering et Packham \(2013\)](#), [Detering \(2014\)](#), [Levy dit Vehel \(2014\)](#) constituent un aperçu des travaux les plus représentatifs du domaine.

Cette thématique a été abordée suivant deux axes : l'analyse de l'incertitude associée à la construction de courbes de taux ou de crédit et l'étude de la compatibilité des indices de Sobol avec la théorie des ordres stochastiques. Nous proposons de développer ces deux axes dans les sections suivantes.

2.2.1 Incertitude inhérente à la construction de structures par terme

La construction de structures par terme est un processus central pour l'évaluation et la gestion des risques financiers. En pratique, ce problème consiste à transformer un petit nombre de prix de marché en un continuum de valeurs représentant l'évolution d'une grandeur de référence en fonction de l'horizon temporel. Dans les articles [Cousin et Niang \(2014\)](#) et [Cousin et al. \(2015\)](#), nous montrons que ce processus peut être entaché d'une source d'incertitude significative qu'il convient dans certains cas de quantifier.

Nous appelons ici structure par terme une courbe qui décrit l'évolution d'une grandeur économique ou financière de référence en fonction de l'horizon temporel. Par exemple, la variable de référence peut être un taux d'intérêt, un taux d'inflation, un taux de change, le rendement ou le spread de crédit associé à la dette d'une entreprise ou d'un état, la probabilité de défaut pour un émetteur de dette ou bien la volatilité d'une action cotée. Il est important de souligner que les points de la courbe ne sont en général pas directement observables. En pratique, elles sont construites à partir d'un ensemble d'instruments financiers dont la valeur dépend de certains points de la courbe considérée. Ainsi, l'observation des prix de marché de ces produits apporte une information indirecte sur la courbe. En outre, cette information ne peut être considérée comme fiable que si les instruments retenus sont négociés de manière suffisamment liquide, de sorte que leur cotation reflète une bonne estimation du risque sous-jacent et donc de la variable de référence. La construction de structures par terme repose habituellement sur un

petit nombre de prix de marché. L'information à disposition est donc incomplète pour extraire l'ensemble des valeurs de la courbe. Ainsi, le processus de construction engendre de manière inévitable une incertitude, notamment pour certains horizons où l'information de marché est soit inexistante, soit de mauvaise qualité. Dans ce travail, nous avons développé des méthodes adaptées à la quantification de cette incertitude.

La construction de structures par terme se distingue des techniques d'interpolation classiques pour deux raisons. La première est que l'information de marché (les prix des produits de référence) ne fournit habituellement pas directement la valeur de la courbe à différents horizons. Cette information se traduit plutôt comme des contraintes indirectes sur les valeurs de la courbe à certains horizons. Classiquement, si la courbe reproduit bien les prix de marché pour un ensemble de produits, les valeurs de la courbe construite doivent vérifier un système d'équations à une petite marge d'erreur près. Il ne s'agit donc pas de contraintes d'interpolation pure. La seconde raison est que les courbes à construire doivent en outre satisfaire certaines conditions de forme comme la monotonie ou la positivité. Ces conditions découlent de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Par exemple, sous cette hypothèse, une courbe de prix de zéro-coupon sans risque ou de facteur d'actualisation est nécessairement décroissante en fonction de la durée jusqu'à maturité. De manière équivalente, une courbe de taux forward sera positive.

Les méthodes existantes de construction de structure par terme supposent que la courbe à construire appartient à une famille de courbes paramétrées. C'est le cas par exemple pour les méthodes basées sur la fonctionnelle de [Nelson et Siegel \(1987\)](#), sur des splines polynomiales (plusieurs paramètres à estimer sur chaque morceau de la spline) ou sur d'autres fonctions de base comme celles proposées par [Smith et Wilson \(2001\)](#). La construction consiste alors à trouver le jeu de paramètres qui permet à la courbe de reproduire le plus fidèlement possible les cotations de marché pour les maturités disponibles. Toutes ces méthodes de construction ne se valent pas. [Hagan et West \(2006\)](#) proposent une revue des différentes techniques d'interpolation utilisées dans le cadre de construction de courbe de taux. Ils spécifient plusieurs critères de qualité permettant de comparer ces techniques : capacité à reproduire les données de marché, absence d'opportunités d'arbitrage, régularité de la courbe, localité de la technique d'interpolation, stabilité de taux forwards et cohérence des stratégies de couverture données par la courbe construite. Dans la lignée de cette étude, d'autres travaux comme ceux de [Andersen \(2007\)](#), [Iwashita \(2013\)](#) ou de [Le Floc'h \(2013\)](#) se sont intéressés à des méthodes qui prennent en compte les critères mentionnés ci-dessus. Notons par ailleurs, que suite à la crise financière de 2007-2008, un nouveau paradigme a émergé en terme de modélisation et de gestion du risque de taux. Il s'agit d'un environnement dit multi-courbes dans lequel l'actualisation et les paiements d'intérêt associés aux produits de taux ne reposent plus sur la même courbe de taux. Dans ce nouveau cadre d'évaluation, les techniques de construction ont du être adaptées comme le montre [Ametrano et Bianchetti \(2009\)](#), [Chibane et al. \(2009\)](#), [Kenyon et Stamm \(2012\)](#) ou [Fries \(2013\)](#). Notons que, parmi toutes ces méthodes, aucune ne fait consensus dans tous les cadres d'application (construction d'indicateurs économiques, gestion de portefeuilles obligataires, gestion de produits dérivés). Par ailleurs, aucune de ces méthodes ne permet de quantifier ou de prendre en compte l'incertitude inhérente à la construction de structures par terme.

Ce problème est relié à l'étude du risque de modélisation et ses conséquences pour la gestion des risques financiers. Ce sujet n'est pas nouveau mais il a connu une attention particulière

suite aux récentes crises financières. Comme en témoigne les travaux de [Derman \(1996\)](#), [Eberlein et Jacod \(1997\)](#), [El Karoui et al. \(1998\)](#), [Green et Figlewski \(1999\)](#), [Branger et Schlag \(2004\)](#), [Cont \(2006\)](#), [Davis et Hobson \(2007\)](#), [Henaff \(2010\)](#), [Morini \(2011\)](#), un des principaux objectifs a concerné l'obtention de fourchettes de valeurs pour des indicateurs de risque tels que des mesures de risque ou des prix d'actifs dérivés, sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage et sachant que la distribution des risques sous-jacents est compatible avec certaines données de marché. Cependant, dans beaucoup de ces études, la question de l'impact de l'incertitude sur la distribution jointe des risques ou sur leur dynamique pré-suppose la connaissance parfaite des lois marginales. Notons que, dans bien des situations, la construction de structures par terme s'apparente à un problème d'identification d'une distribution de probabilité. C'est le cas par exemple pour des probabilités de défaut construites à partir de spreads de CDS ou bien des lois marginales du rendement d'une action déterminées à partir des prix des options écrites sur cette même action (ou des volatilités implicites).

Dans ce contexte, nous avons obtenu dans [Cousin et Niang \(2014\)](#), des bornes de non-arbitrage associées à des courbes de taux ou de défaut implicite parfaitement compatibles avec les cotations des produits de référence associés. Suivant la courbe à construire, les produits de référence peuvent être des Swaps de taux OIS, des Swap contre indice Euribor ou Libor, des prix d'obligations ou des spreads de CDS. La Figure 2.2 représente l'ensemble des valeurs possibles des facteurs d'actualisation construits à partir de taux swaps OIS en respectant la contrainte de non-arbitrage. Cette dernière se traduit ici en imposant la décroissance des courbes construites. Pour les OIS, nous avons montré que les bornes obtenues sont fines au sens où elles sont atteintes pour des courbes extrêmes vérifiant les contraintes. Les maturités les plus liquides pour les swaps OIS ne sont pas réparties de manière homogène sur la plage de maturité considérée. Elles sont espacées avec un pas de temps annuel entre 1 an et 10 ans. Entre les maturités 10 ans et 40 ans, seules 4 maturités peuvent être considérées comme liquides, soit 15, 20, 30 et 40 ans. Notons que plus l'espace entre deux maturités (standard) consécutives est important, plus la taille des bornes de valeurs admissibles est grande pour des maturités intermédiaires. Par ailleurs, même s'il existe une cotation de swap pour la maturité 40 ans, l'incertitude sur les valeurs de la courbe à cette maturité peut être significative.

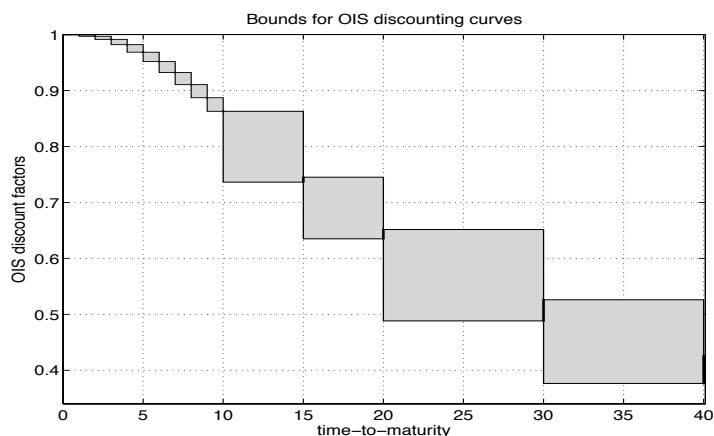


FIGURE 2.2 – Union de rectangles à l’intérieur duquel doivent passer, en l’absence d’opportunités d’arbitrage, toutes les courbes de facteurs d’actualisation calibrées sur les cotations des swaps OIS au 31 mai 2013. Les durées sur l’axe des abscisses sont en année.

Le même exercice a été mené pour la construction de courbe de défaut à partir des spreads d’un CDS référençant un même émetteur de dette à différentes maturités de protection. La Figure 2.3 représente les valeurs admissibles pour les probabilités de survie de l’émetteur AIG pour des horizons allant jusqu’à 10 ans. Les bornes aux maturités standard 3, 5, 7 et 10 ans ont été obtenues en prenant en compte la compatibilité de la courbe avec les spreads observés et la contrainte de décroissance des probabilités de survie. Les mêmes conclusions que pour les courbes d’actualisation OIS peuvent être tirées de cet exemple.

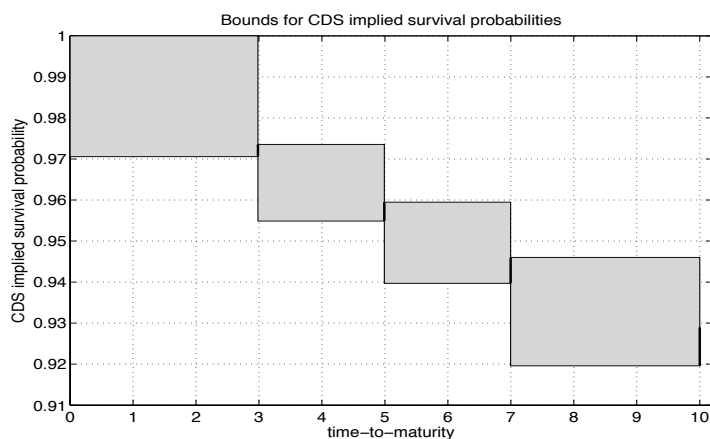


FIGURE 2.3 – Union de rectangle à l’intérieur duquel doivent passer, en l’absence d’opportunités d’arbitrage, toutes les courbes de survie implicite calibrées sur les spreads au 17, décembre 2007 des CDS référençant AIG. Ces rectangles ont été construits en supposant un taux de recouvrement fixé à $R = 40\%$ et un taux d’actualisation constant égal à 3% . Les durées sur l’axe des abscisses sont en année.

Les bornes que nous avons obtenues donnent l’ensemble des valeurs admissibles d’une courbe lorsque la construction de cette dernière repose sur certaines contraintes. Cependant,

elles ne permettent pas de distinguer, dans l'ensemble des valeurs possibles, celles qui seraient les plus probables de se réaliser. En d'autre terme, ces bornes ne fournissent que le support de la distribution des valeurs admissibles.

Dans l'article [Cousin et al. \(2015\)](#), nous proposons une nouvelle méthode de construction de structures par terme qui généralise les techniques classiques basées sur des splines en permettant par ailleurs de quantifier l'incertitude. La méthode proposée repose sur des techniques de krigeage sous contraintes. Le krigeage est une technique de géostatistique qui permet d'estimer la densité de certains minerais dans une zone pré-définie de l'espace en prenant en compte un petit nombre d'observations à certains points du sol, comme des forages. Le principe du krigeage repose sur la détermination de la distribution conditionnelle d'un champ aléatoire connaissant les valeurs de ce champ à certains points de l'espace (voir par exemple, [Krige \(1951\)](#), [Matheron \(1963\)](#), [Cressie \(1990\)](#)). Le principal intérêt de cette approche est qu'elle permet d'estimer les valeurs de la variable de référence à d'autres points de l'espace et de quantifier l'incertitude associée à cette estimation. Malgré la popularité de cette méthode dans divers domaines comme l'hydrologie, la météorologie ou l'épidémiologie, très peu d'applications ont été considérées dans le domaine de la gestion des risques.

Notre travail a d'abord consisté à adapter les techniques de krigeage existantes aux contraintes inhérentes à la construction de structures par terme. Contrairement au krigeage classique, la compatibilité de la courbe avec les observations de marché se traduit par la vérification d'un système d'équations. Dans la grande majorité des applications, ce système d'équations peut être exprimé de manière linéaire. Nous donnons dans l'article [Cousin et al. \(2015\)](#) des exemples de tels systèmes linéaires pour différents types de structure par terme. D'autre part, les techniques de krigeage classique ne conviennent pas dans ce contexte car elles ne permettent pas de prendre en compte les contraintes de forme (monotonie, positivité) qui découlent de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Nous avons ainsi montré comment construire et simuler efficacement un processus spatial gaussien sachant que ce dernier satisfait un système d'équations linéaires et qu'il est par ailleurs monotone ou positif. Nous avons également proposé de considérer la courbe contrainte la plus probable (parmi toutes les réalisations du processus gaussien) comme estimateur de la courbe à construire. Cette dernière peut être obtenue de manière très efficace en résolvant un problème d'optimisation quadratique. Notons que le processus gaussien sous-jacent est caractérisé par un noyau de covariance dont les paramètres contrôlent à la fois la variance des points de la courbe et leur corrélation. En adaptant des techniques classiques de validation croisée, nous avons également proposé des estimateurs pour ces paramètres d'incertitude.

Les Figures 2.4 et 2.5 illustrent la méthode proposée dans deux cadres d'applications. La Figure 2.4 concerne la construction de courbes de taux zéro-coupon issues des cotations de Swaps OIS au 15 juin 2011. Les maturités standard des Swaps OIS que nous avons considérées sont les mêmes que pour la Figure 2.2, même s'il s'agit d'une autre date de cotation. La Figure 2.5 concerne la construction de courbes de survie à partir des spreads de CDS sur la Russie observés le 23 Aout 2012 pour les maturités de protection 1, 2, 3, 4, 5, 7 et 10 ans. Nous avons comparé deux types de processus gaussiens, le premier avec un noyau de covariance gaussien (graphiques à gauche) et le second avec un noyau de covariance de type Matérn 3/2 (graphiques à droite). Chaque figure comporte des simulations de courbes qui vérifient parfaitement les contraintes de calibration et les contraintes de non-arbitrage. Elle présente également l'estimateur de la courbe la plus probable (ligne pleine en noir) et, pour chaque

maturité, des intervalles de confiance à 95% (en pointillé). Tous les paramètres d'incertitude ont été estimés par validation croisée. Pour les données que nous avons testées, le noyau Matérn 3/2 semble le mieux adapté : la minimisation du critère de validation croisée donnent de meilleurs résultats que pour le noyau gaussien. Par ailleurs, comme nous pouvons le voir sur la Figure 2.4, l'estimateur de la courbe la plus probable (mode) pour le noyau Matérn 3/2 apparaît au milieu des courbes simulées contrairement au noyau gaussien. Comme illustré dans l'article, notre méthode permet d'obtenir facilement des intervalles de confiance pour tout type de problème d'évaluation qui repose sur une structure par terme (rentes, produits de taux, CDS de maturités non-standard, évaluation du risque de contrepartie). Cette méthode pourrait également servir à estimer l'incertitude dans le calcul de stratégies de couverture issues de la courbe. D'autres applications pourraient être envisagées, comme par exemple, la quantification de l'incertitude associée à la distribution implicite des rendements d'une action (à partir du prix coté des options) et in fine des surfaces de volatilité.

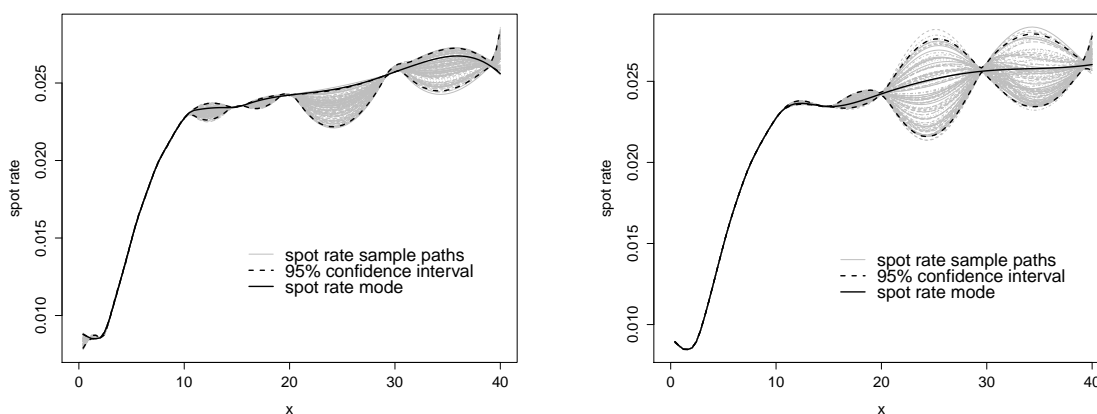


FIGURE 2.4 – Courbes de taux zéro-coupon simulées (en gris) à partir d'un processus gaussien vérifiant les contraintes de calibration et de non-arbitrage. A gauche : cas d'un noyau de covariance gaussien. A droite : cas d'un noyau de covariance Matérn 3/2. Toutes les courbes sont compatibles avec les cotations de swaps OIS au 15 juin 2011.

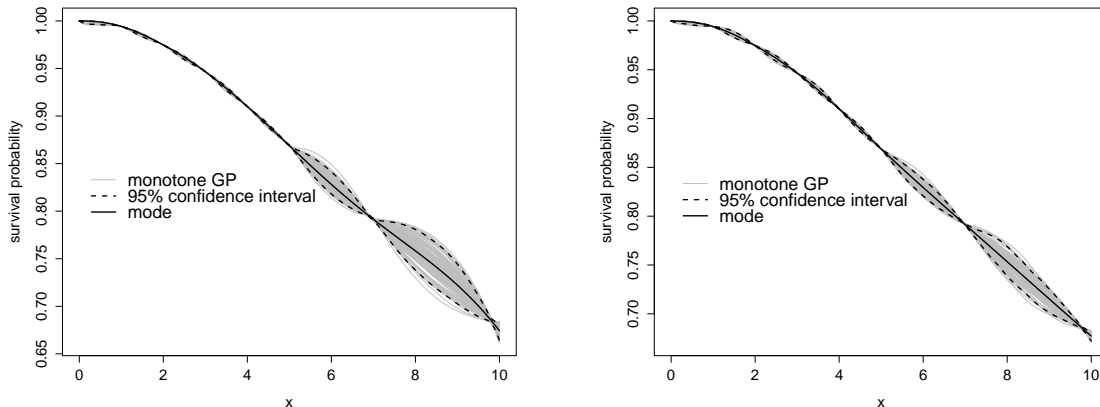


FIGURE 2.5 – Courbes de survie simulées (en gris) à partir d’un processus gaussien conditionnement décroissant et vérifiant les contraintes de calibrations. À gauche : cas d’un noyau de covariance gaussien. À droite : cas d’un noyau de covariance Matérn 3/2. Toutes les courbes sont compatibles avec les spreads de CDS sur la Russie au 23 Aout 2012 pour les maturités standard 1, 2, 3, 4, 5, 7 et 10 ans.

2.2.2 Sur la compatibilité entre ordres stochastiques et indices de Sobol

Comme nous l’avons vu précédemment, la prise en compte des incertitudes de modèles dans les processus de gestion des risques est un sujet majeur qui suscite un intérêt croissant à la fois de la part de l’industrie et dans le milieu académique. Gérer des risques financiers ou d’assurance repose sur la mise en œuvre de modèles dont les paramètres doivent être préalablement estimés. En pratique, l’estimation de ces paramètres est entachée d’une incertitude qu’il est parfois possible de quantifier à l’aide d’outils statistiques. Dans ce contexte, comment identifier et isoler les paramètres ou les facteurs de risque qui influencent le plus le prix et la couverture d’un actif financier et dont la modélisation doit être très fine, de ceux pour lesquels une modélisation grossière suffit ?

Cette question peut être traitée grâce à des outils développés dans le domaine de l’analyse de sensibilité⁶. L’objectif est d’identifier les paramètres d’entrée d’un modèle dont l’incertitude contribue le plus à l’incertitude sur la sortie du modèle. Cette problématique est très développée dans les applications en mécanique des fluides, géophysique, aéronautique et dans d’autres sciences de l’ingénieur. Comme mentionné dans [Borgonovo et Peccati \(2007\)](#) ou [Borgonovo \(2006\)](#), les indices de Sobol constituent des outils classiques d’analyse de sensibilité qui permettent d’estimer la part de la variance de la sortie du modèle expliquée par l’incertitude d’un ou plusieurs de ses paramètres d’entrée. Plus formellement, supposons que le modèle d’évaluation des risques est caractérisé par une fonction f de plusieurs variables X_1, \dots, X_d , de sorte que la sortie du modèle Y s’exprime de la manière suivante :

$$Y = f(X_1, \dots, X_d)$$

où X_1, \dots, X_d sont des variables aléatoires indépendantes. La décomposition de Hoeffding permet de décomposer la variance de la sortie du modèle en somme de contributions imputables

6. Le livre de [Saltelli et al. \(2008\)](#) est une bonne entrée en matière sur l’analyse de sensibilité. Il contient par ailleurs des exemples intéressants d’applications en finance.

à chaque paramètre et à leur interaction. La contribution du paramètre X_i à la variance totale est mesurée par l'indice de Sobol donné par :

$$S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_d) \mid X_i))}{\text{Var}(Y)}. \quad (2.1)$$

Dans l'article [Cousin et al. \(2014\)](#), nous avons analysé dans quelles mesures une augmentation de l'incertitude associée au paramètre i entraîne une augmentation de son indice de Sobol S_i . Ce problème a été étudié à l'aide de la théorie des ordres stochastiques⁷. Nous avons montré que, sous certaines conditions de monotonie et de convexité sur la fonction f , les indices de Sobol sont compatibles avec les ordres *excess wealth order* et *dispersif order*. Contrairement à l'ordre de la dominance stochastique ou à l'ordre convexe, ces ordres stochastiques sont compatibles avec la variance, i.e., une augmentation du risque au sens de ces ordres entraînent une augmentation de la variance. Ces résultats ont également été étendus pour des indices de Sobol dit globaux qui intègrent par ailleurs les possibles interactions entre les paramètres.

7. Sur la théorie des ordres stochastiques et ses liens avec la gestion des risques, le lecteur est renvoyé au livre de [Denuit et al. \(2005\)](#). Les livres de [Shaked et Shanthikumar \(1994\)](#) et [Müller et Stoyan \(2002\)](#) constituent les références les plus complètes sur le sujet.

Chapitre 3

Perspectives de recherche

Dans ce chapitre, nous présentons deux perspectives de recherche, la première sur le développement de techniques de filtrage récursif pour des processus ponctuels marqués et la seconde sur le problème de la couverture des risques financiers en présence de risque de modèle. Les applications associées au filtrage de processus ponctuel concernent le développement de nouvelles méthodes d'estimation statistique pour des modèles de crédit en se basant uniquement sur un historique de défauts ou de migrations de rating. La seconde direction de recherche a pour objectif de couvrir dynamiquement des risques financiers en présence d'incertitude sur le modèle et en considérant que cette incertitude peut être réduite au fur et à mesure que les risques se réalisent.

3.1 Filtrage récursif de processus ponctuels marqués

Ce premier axe de recherche s'inscrit dans la poursuite des travaux que j'ai menés dans le cadre de la thèse de Réda Khéliouen et notamment dans le cadre de l'article [Cousin et Kheliouen \(2015\)](#). Dans ce dernier travail, nous comparons différentes approches pour estimer des modèles de migration de rating dont les probabilités de transitions dépendent de facteurs dynamiques. Nous considérons deux types de modèles : le modèle "ordered Probit" (approche structurelle) tel que décrit par exemple dans [Gagliardini et Gouriéroux \(2005\)](#) et le "multi-state latent factor intensity model" (approche à intensité) étudié par [Koopman et al. \(2007\)](#). Pour chacune de ces deux approches, les facteurs qui gouvernent la dynamique des probabilités ou les intensités de transition sont soit des variables macro-économiques observables soit des facteurs non-observables. Dans le premier cas, les paramètres décrivant le lien entre probabilités de transition et le facteur sont estimés en maximisant la vraisemblance conditionnelle du modèle. Lorsque le facteur n'est pas observé, la maximisation doit se faire sur la vraisemblance non-conditionnelle. Cette dernière étant très lourde à calculer (voir par exemple, [Koopman et al. \(2007\)](#)), nous avons adapté une approche proposée par [Gagliardini et Gouriéroux \(2005\)](#) qui consiste à représenter la dynamique des probabilités de transition sous forme d'un modèle linéaire gaussien. Les paramètres du modèle sont estimés en maximisant la vraisemblance du modèle préalablement filtrée par l'algorithme récursif de Kalman. L'estimation à partir d'historique de rating Standard & Poor's nous permet de conclure que l'approche à intensité et facteurs observables est celle qui ajuste le mieux les probabilités de transition empiriques. Par ailleurs, l'ajustement est de mauvaise qualité dans le cas de facteurs non-observables. Dans ce dernier cas, la validité de la représentation en terme de modèle linéaire gaussien repose sur la normalité asymptotique de l'estimateur des probabilités ou des intensités de transition, cette

dernière hypothèse étant contestable pour un échantillon de petite taille.

Dans ce projet de recherche, nous proposons d'étudier le problème mathématique du filtrage de processus ponctuels, possiblement marqués. Par exemple, pour un modèle à intensité de défaut stochastique (le processus de défaut étant un processus de Poisson doublement stochastique), le problème consiste à estimer de manière efficace l'intensité de défaut uniquement sur la base de l'historique passé des défauts. L'ajout de "marques" permettrait de prendre en compte des processus de défaut plus généraux. Par exemple, pour un processus de migration de rating, la marque permet d'identifier la notation d'arrivée lorsqu'une migration a lieu.

Plus formellement, considérons un processus ponctuel $(T_i)_{i=1,2,\dots}$, qui est une suite de temps d'arrêt par rapport à une filtration \mathbf{F} telle que $0 < T_1 < T_2 < \dots$ et $T_i \rightarrow \infty$. Le processus $N = (N_t)_{t \geq 0}$ défini par $N_t := \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{T_i \leq t\}}$, est un processus de comptage adapté à la filtration \mathbf{F} . Le processus ponctuel et le processus de comptage génèrent clairement la même filtration $\widehat{\mathbf{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$. Supposons que les décisions à l'instant t ne sont prises que sur la base de l'observation du processus de comptage jusqu'en t , i.e., conditionnellement à la filtration $\widehat{\mathbf{F}}$. Nous supposons par ailleurs que le processus ponctuel est gouverné par une intensité et que le compensateur de N par rapport à la filtration \mathbf{F} peut s'écrire sous la forme multiplicative suivante :

$$\mathbb{E}[dN_t | \mathbf{F}_{t-}] = Y_t \lambda_t dt, \quad (3.1)$$

où $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $\widehat{\mathbf{F}}$ et $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$ est adapté à \mathbf{F} . Par la règle d'espérance itérée, le compensateur de N par rapport à la filtration $\widehat{\mathbf{F}}$ s'écrit

$$\mathbb{E}[dN_t | \widehat{\mathbf{F}}_{t-}] = Y_t \widehat{\lambda}_t dt, \quad (3.2)$$

avec

$$\widehat{\lambda}_t = \mathbb{E}[\lambda_t | \widehat{\mathbf{F}}_{t-}]. \quad (3.3)$$

Dans le contexte du risque de défaut, les T_i correspondent à des dates successives de défaut, N_t représente le nombre total de défauts à la date t et Y_t correspond à l'exposition du portefeuille (nombre d'entité exposé à un risque de défaut) à la date t . Pour un portefeuille en *run-off* avec un nombre d'entité initial égal à m , l'exposition est donnée par $Y_t = m - N_t$.

Dans [Leijdekker et Spreij \(2011\)](#), les auteurs traitent du cas très particulier où l'intensité est décrite par un processus CIR. Leur résolution du problème de filtrage nécessite de traiter de manière spécifique les instants de saut du processus de comptage. Par ailleurs, le filtre ne s'exprime pas de manière récursive.

Les questions qui nous intéressent dans ce contexte sont les suivantes :

- Sous quelles conditions ou quelles hypothèses de modélisation est-il possible d'obtenir une expression calculable de $\widehat{\lambda}_t$?
- Est-il possible d'obtenir un filtre récursif pour $\widehat{\lambda}_t$, i.e., d'exprimer la meilleure prédiction $\widehat{\lambda}_{t+1}$ de λ_{t+1} comme une fonction de $\widehat{\lambda}_t$?

Ce travail est en cours avec Ragnar Norberg, chercheur à l'ISFA.

3.2 Couverture des risques en présence d'incertitude de modèle

Ce projet de recherche fait suite aux travaux sur le risque de modélisation présentés à la Section 2.2.

Nous proposons de développer une méthode inspirée de Corsi et al. (2007), Jarrow (2012), Levy dit Vehel (2014), Runggaldier et al. (2002), Runggaldier et Zaccaria (2000) et permettant d'estimer et de gérer dynamiquement le risque de modèle. La méthode proposée utilise les outils du contrôle adaptatif pour les systèmes dynamiques stochastiques et le principe de l'équivalent certain (cf. Bäuerle et Rieder (2011); Bielecki (1986, 1991); Chen et Guo (1991); Kumar et Varaiya (1986)).

Supposons que le modèle cherche à décrire l'évolution du cours d'une action et que cette dynamique est gouvernée par un paramètre θ qui n'est pas connu avec certitude (car mal estimé ou non observé). La principale idée est de contrôler l'erreur de couverture en réévaluant l'incertitude sur le paramètre θ du modèle (incertitude sur θ) à mesure que l'on observe les réalisations du sous-jacent. Plus particulièrement, nous considérons le problème de la couverture dynamique d'une position courte sur une option de vente européenne de maturité T écrite sur une action S et de payoff $H(S_T)$. Il n'est typiquement pas possible de répliquer parfaitement ce payoff (par exemple dans un cadre incomplet ou si le capital initial est trop faible). L'objectif est alors de construire une stratégie de couverture autofinancée qui minimise une certaine fonction de l'erreur de couverture. En négligeant le taux d'intérêt sans risque et en notant φ_t la quantité de sous-jacent dans le portefeuille à l'instant t , la valeur du portefeuille de couverture V évolue suivant la dynamique suivante :

$$V_{t+1}(\varphi) = V_t(\varphi) + \varphi_t(S_{t+1} - S_t). \quad (3.4)$$

En suivant l'approche décrite dans Runggaldier et al. (2002), l'erreur de couverture s'écrit :

$$\mathbb{E}_{S_0, V_0}^\theta \left(l[(H(S_T) - V_T(\varphi))^+] \right) := \mathbb{E} \left(l[(H(S_T(\theta)) - V_T(\varphi; \theta))^+] \middle| S_0, V_0 \right), \quad (3.5)$$

où $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de perte, i.e. une fonction croissante telle que $l(0) = 0$ (la fonction l ne pénalise que les pertes et non les gains). La notation \mathbb{E}^θ précise que l'espérance est calculée en supposant que la dynamique du sous-jacent est paramétrée par θ . Ainsi, si le paramètre θ était connu avec certitude, le problème de la couverture pourrait être formulé de la manière suivante :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{S_0, V_0}^\theta \left(l[(H(S_T) - V_T(\varphi))^+] \right). \quad (3.6)$$

où \mathcal{A} est un ensemble de stratégies admissibles. Nous supposons au contraire que le paramètre θ n'est pas connu avec certitude et qu'il est représenté par une variable aléatoire Θ à valeur dans Θ . Cette dernière admet une distribution a priori (*prior*) notée ν_0 . Ainsi, le problème de couverture optimale que nous cherchons à résoudre s'écrit :

$$\min_{\varphi \in \mathcal{A}} \int_{\Theta} \mathbb{E}_{S_0, V_0}^\theta \left(l[(H(S_T) - V_T(\varphi))^+] \right) \nu_0(d\theta). \quad (3.7)$$

En exploitant un principe de séparation, on peut montrer que, sous certaines conditions, la solution du problème de contrôle optimal ci-dessus est donnée par un principe de programmation dynamique où le contrôle de l'erreur de couverture se fait conjointement avec la mise

à jour bayésienne de l'incertitude sur le paramètre θ .

Les questions qui nous intéressent dans ce contexte sont notamment les suivantes :

- Dans quel cadre de modélisation est-il possible de résoudre le principe de Bellman ?
- Quels sont les liens possibles avec l'approche robuste ci-dessous ?

$$\min_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{S_0, \tilde{V}_0}^{\theta} \left(l[(H(S_T) - V_T(\varphi))^+] \right). \quad (3.8)$$

Ce travail est en cours avec Tom Bielecki et Igor Cialenco, Illinois Institute of Technology, Chicago et Monique Jeanblanc, Université d'Evry.

Bibliographie

- Ametrano, F., Bianchetti, M. (2009) Bootstrapping the illiquidity : Multiple yield curves construction for market coherent forward rates estimation. Risk Books.
- Andersen, L. (2007) Discount curve construction with tension splines. Review of Derivatives Research 10 (3), 227–267.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) Coherent measures of risk. Mathematical Finance 9 (3), 203–228.
- Assefa, S., Bielecki, T., Crepey, S., Jeanblanc, M. (2011) CVA computation for counterparty risk assessment in credit portfolios. Dans : Bielecki, T., D., B., Patras, F. (Eds.), Credit Risk Frontiers : Sub-prime Crisis, Pricing and Hedging, CVA, MBS, Ratings, and Liquidity. Bloomberg Press / Wiley.
- Avellaneda, M., Levy, A., Paras, A. (1995) Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. Applied Mathematical Finance 2 (2), 73–88.
- Avellaneda, M., Paras, A. (1996) Managing the volatility risk of portfolios of derivative securities : the lagrangian uncertain volatility model. Applied Mathematical Finance 3 (1), 21–52.
- Bäuerle, N., Rieder, U. (2011) Markov decision processes with applications to finance. Universitext. Springer, Heidelberg.
- Bielecki, T. (1986) Adaptive control of markov chain over a finite parameter set without continuity assumptions on the control laws. IEEE Transactions on Automatic Control AC-31 (10), 985–987.
- Bielecki, T. (1991) Adaptive control of continuous-time linear stochastic systems with discounted cost criterion. J. Optim. Theory Appl. 68 (2), 379–383.
- Bielecki, T., Cousin, A., Crepey, S., Herbertsson, A. (2014a) A bottom-up dynamic model of portfolio credit risk - Part I : Markov copula perspective. Dans : Recent Advances in Financial Engineering 2012. World Scientific, pp. 25–50.
- Bielecki, T., Cousin, A., Crepey, S., Herbertsson, A. (2014b) A bottom-up dynamic model of portfolio credit risk - Part II : Common-shock interpretation, calibration and hedging issues. Dans : Recent Advances in Financial Engineering 2012. World Scientific, pp. 51–74.

- Bielecki, T., Cousin, A., Crepey, S., Herbertsson, A. (2014c) A bottom-up dynamic model of portfolio credit risk with stochastic intensities and random recoveries. *Communications in Statistics – Theory and Methods* 43 (7), 1362–1389.
- Bielecki, T., Cousin, A., Crepey, S., Herbertsson, A. (2014d) Dynamic hedging of portfolio credit risk in a Markov copula model. *Journal of Optimization Theory and Applications* 161 (1), 90–102.
- Bielecki, T., Crepey, S., Jeanblanc, M., Zargari, B. (2012) Valuation and hedging of CDS counterparty exposure in a markov copula model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 15 (1), 1250004, 39.
- BIS (2011) Revisions to the Basel II market risk framework, Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements.
- Black, F., Cox, J. (1976) Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance* 31, 351–367.
- Boissay, F. (2006) Credit chains and the propagation of financial distress, working paper.
- Borgonovo, E. (2006) Measuring uncertainty importance : Investigation and comparison of alternative approaches. *Risk Analysis* 26 (5), 1349–1361.
- Borgonovo, E., Peccati, L. (2007) On the quantification and decomposition of uncertainty. Vol. 41. Springer.
- Branger, N., Schlag, C. (2004) Model risk : A conceptual framework for risk measurement and hedging. Dans : EFMA 2004 Basel Meetings Paper.
- Chen, H. F., Guo, L. (1991) Identification and stochastic adaptive control. *Systems & Control : Foundations & Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.
- Chibane, M., Selvaraj, J., Sheldon, G. (2009) Building curves on a good basis, working paper.
- Cont, R. (2006) Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments. *Mathematical finance* 16 (3), 519–547.
- Cont, R., Deguest, R., Kan, Y. H. (2010) Default intensities implied by CDO spreads : inversion formula and model calibration. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 1 (1), 555–585.
- Cont, R., Kan, Y. H. (2011) Dynamic hedging of portfolio credit derivatives. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 2 (1), 112–140.
- Corsi, M., Pham, H., Runggaldier, W. (2007) Numerical approximation by quantization of control problems in finance under partial observations, working paper.
- Cousin, A. (2008) Analyse du risque et couverture des tranches de CDO synthétiques. Thèse, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Cousin, A. (2015) Discussion sur l'article “La mesure du risque systémique après la crise financière” de Olivier de Bandt, Jean-Cyprien Héam, Claire Labonne et Santiago Tavoraro. *La Revue Economique* 66 (3), 501–504.

- Cousin, A., Crépey, S., Kan, Y. H. (2012a) Delta-hedging correlation risk ? Review of Derivatives Research 15 (1), 25–56.
- Cousin, A., Di Bernardino, E. (2013) On multivariate extensions of Value-at-Risk. Journal of Multivariate Analysis 119, 32–46.
- Cousin, A., Di Bernardino, E. (2014) On multivariate extensions of Conditional-Tail-Expectation. Insurance : Mathematics and Economics 55, 272–282.
- Cousin, A., Dorobantu, D., Rullière, D. (2010) A note on the computation of Waring formula, working paper.
- Cousin, A., Dorobantu, D., Rullière, D. (2012b) Valuation of portfolio loss derivatives in an infectious model. Dans : Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. Springer, pp. 139–147.
- Cousin, A., Dorobantu, D., Rullière, D. (2013) An extension of Davis and Lo’s contagion model. Quantitative Finance 13 (3), 407–420.
- Cousin, A., Janon, A., Maume-Deschamps, V., Niang, I. (2014) On the consistency of Sobol indices with respect to stochastic ordering of model parameters, working paper.
- Cousin, A., Jeanblanc, M. (2012) Hedging portfolio loss derivatives with CDSs. Dans : Festschrift in honour of Robert Elliott. World Scientific.
- Cousin, A., Jeanblanc, M., Laurent, J.-P. (2011) Hedging CDO tranches in a Markovian environment. Dans : Paris-Princeton Lectures in Mathematical Finance, Lecture Notes in Mathematics. Springer.
- Cousin, A., Kheliouen, R. (2015) A comparative study on the estimation of factor migration models, working paper.
- Cousin, A., Laurent, J.-P. (2008a) Comparison results for exchangeable credit risk portfolios. Insurance : Mathematics and Economics 42 (3), 1118–1127.
- Cousin, A., Laurent, J.-P. (2008b) An overview of factor models for pricing CDO tranches. Dans : Cont, R. (Ed.), Frontiers In Quantitative Finance, Ed. R. Cont. Wiley Finance.
- Cousin, A., Laurent, J.-P. (2010) Dynamic hedging of synthetic CDO tranches : Bridging the gap between theory and practice. Dans : Bielecki, T. R., Brigo, D., Patras, F. (Eds.), Credit Risk Frontiers : Subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, ratings and liquidity. Wiley.
- Cousin, A., Niang, I. (2014) On the range of admissible term-structures, working paper.
- Cousin, A., Rullière, D., Maatouk, H. (2015) Kriging of financial term-structures, working paper.
- Cressie, N. (1990) The origins of kriging. Mathematical Geology 22 (3), 239–252.
- Das, S., Duffie, D., Kapadia, N., Saita, L. (2007) Common failings : how corporate defaults are correlated. Journal of Finance 62 (1), 93–117.
- Davis, M., Lo, V. (2001) Infectious defaults. Quantitative Finance 1, 382–387.

- Davis, M. H., Hobson, D. G. (2007) The range of traded option prices. *Mathematical Finance* 17 (1), 1–14.
- de Bandt, O., Héam, J.-C., Labonne, C., Tavoraro, S. (2015) La mesure du risque systémique après la crise financière. *La Revue Economique* 66 (3), 481–500.
- Denis, L., Martini, C. (2006) A theoretical framework for the pricing of contingent claims in the presence of model uncertainty. *The Annals of Applied Probability* 16 (2), 827–852.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. (2005) *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*. Wiley.
- Derman, E. (April 1996) Model risk, Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs.
- Derman, E. (1999) Regimes of volatility, Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs.
- Detering, N. (2014) Measuring the model risk of quadratic risk minimizing hedging strategies with an application to energy markets, working paper.
- Detering, N., Packham, N. (2013) Measuring the model risk of contingent claims, working paper.
- Dupire, B. (1994) Pricing with a smile. *RISK* January, 18–20.
- EBA (November 2012) Discussion paper on draft regulatory technical standards on prudent valuation, under article 100 of the draft capital requirements regulation (CRR), Discussion Paper, European Banking Authority.
- Eberlein, E., Jacod, J. (1997) On the range of options prices. *Finance and Stochastics* 1 (2), 131–140.
- El Karoui, N., Jeanblanc-Picquè, M., Shreve, S. E. (1998) Robustness of the Black and Scholes formula. *Mathematical finance* 8 (2), 93–126.
- Embrechts, P., Puccetti, G. (2006) Bounds for functions of multivariate risks. *Journal of Multivariate Analysis* 97 (2), 526–547.
- Federal Reserve (April 2011) Supervisory guidance on model risk management, Board of Governors of the Federal Reserve System, Office of the Controller of the Currency, SR Letter 11-7 Attachment.
- Fries, C. P. (2013) Curves and term structure models : Definition, calibration and application of rate curves and term structure models, dZ Bank AG ; LMU Munich, Department of Mathematics.
- Gagliardini, P., Gouriéroux, C. (2005) Stochastic migration models with application to corporate risk. *Journal of Financial Econometrics* 3 (2), 188–226.
- Giesecke, K., Goldberg, L. (2006) A top down approach to multi-name credit, working paper, Stanford University.
- Glasserman, P., Xu, X. (2013) Robust portfolio control with stochastic factor dynamics. *Operations Research* 61 (4), 874–893.

- Glasserman, P., Xu, X. (2014) Robust risk measurement and model risk. *Quantitative Finance* 14 (1), 29–58.
- Green, T. C., Figlewski, S. (1999) Market risk and model risk for a financial institution writing options. *The Journal of Finance* 54 (4), 1465–1499.
- Hagan, P. S., West, G. (2006) Interpolation methods for curve construction. *Applied Mathematical Finance* 13 (2), 89–129.
- Halperin, I., Tomecek, P. (2008) Climbing down from the top : single name dynamics in credit top down models, working paper, quantitative research, JP Morgan.
- Henaff, P. (2010) A normalized measure of model risk, working paper.
- Hull, J., Predescu, M., White, A. (2004) The relationship between credit default swap spreads, bond yields, and credit rating announcements. *Journal of Banking and Finance* 28 (11), 2789–2811.
- Iwashita, Y. (2013) Piecewise polynomial interpolations, Open Gamma Technical Report.
- Jarrow, R. A. (2012) Hedging derivatives with model error. *Quantitative Finance* 12 (6), 855–863.
- Jobst, N. (2007) An introduction to the risk management of Collateral Debt Obligations, In : *The Handbook of Structured Finance*, A. de Servigny and N. Jobst (eds), McGraw Hill, 295-338.
- Jorion, P., Zhang, G. (2007) Good and bad credit contagion : Evidence from credit default swaps. *Journal of Financial Economics* 84 (3), 860–883.
- Jorion, P., Zhang, G. (2010) Information transfer effects of bond rating downgrades. *Financial Review* 45 (3), 683–706.
- Kenyon, C., Stamm, R. (2012) *Discounting, Libor, CVA and Funding : Interest Rate and Credit Pricing*. Palgrave Macmillan.
- Keynes, J. M. (1937) The general theory of employment. *Quarterly Journal of Economics* 51 (2).
- Knight, F. H. (1921) *Risk, uncertainty and profit*. Dover Books on History, Political and Social Science. Dover publications.
- Koopman, S. J., Lucas, A., Monteiro, A. (07 2007) The multi-state latent factor intensity model for credit rating transitions. *Journal of Econometrics* 142 (1), 399–424.
- Krige, D. (1951) *A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand* : By DG Krige. Thèse, University of the Witwatersrand.
- Kumar, P. R., Varaiya, P. (1986) *Stochastic systems : estimation, identification and adaptive control*. Prentice-Hall, Inc.
- Laurent, J.-P., Cousin, A., Fermanian, J.-D. (2011) Hedging default risks of CDOs in Markovian contagion models. *Quantitative Finance* 11 (12), 1773–1791.

- Le Floch, F. (2013) Stable interpolation for the yield curve, Calypso Technology.
- Lee, J., Prékopa, A. (2013) Properties and calculation of multivariate risk measures : MVaR and MCVaR. *Annals of Operations Research* 211 (1), 225–254.
- Leijdekker, V., Spreij, P. (2011) Explicit computations for filtering problem with point process observations with applications to credit risk. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 25 (3), 393–418.
- Levy dit Vehel, P.-E. (2014) A systematic approach to financial model validation. Thèse, Université de Nice - Sophia Antipolis.
- Matheron, G. (1963) Principles of geostatistics. *Economic geology* 58 (8), 1246–1266.
- McNeil, A. J., Nešlehová, J. (2009) Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and l1-norm symmetric distributions. *The Annals of Statistics* 37, 3059–3097.
- Meissner, G., Hector, R., Rasmussen, T. (2008) Hedging CDOs within the Gaussian copula framework, In : *The Complete Guide to CDOs - Market, Application, Valuation, and Hedging*, RISK books.
- Morini, M. (2011) *Understanding and Managing Model Risk : A practical guide for quants, traders and validators*. Wiley.
- Müller, A., Stoyan, D. (2002) *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester Wiley Series in Probability and Statistics.
- Nelson, C. R., Siegel, A. F. (1987) Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business* 60 (4), 473–489.
- Patel, N. (2007) The untenable robustness of hedging. *RISK* August.
- Petrelli, A., Zhang, J., Jobst, N., Kapoor, V. (2007) A practical guide to CDO trading risk management, In : *The Handbook of Structured Finance*, A. de Servigny and N. Jobst (eds), McGraw Hill, 339-371.
- Puccetti, G., Scarsini, M. (2010) Multivariate comonotonicity. *Journal of Multivariate Analysis* 101, 291–304.
- Rebonato, R. (2002) *Theory and Practice of Model Risk Management*. Dans : *RiskWaters Group, L. (Ed.), Modern Risk Management : A History*. pp. 223–248.
- Runggaldier, W., Trivellato, B., Vargiolu, T. (2002) A Bayesian adaptive control approach to risk management in a binomial model. Dans : *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, III (Ascona, 1999)*. Vol. 52 de *Progr. Probab.* pp. 243–258.
- Runggaldier, W. J., Zaccaria, A. (2000) A stochastic control approach to risk management under restricted information. *Mathematical Finance* 10 (2), 277–288.
- Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M., Tarantola, S. (2008) *Global Sensitivity Analysis : The Primer*. Wiley.
- Scaillet, O. (2004) Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall. *Mathematical Finance* 14 (1), 115–129.

- Shaked, M., Shanthikumar, J. (1994) *Stochastic Orders and Their Applications*. Academic Press, London.
- Smith, A., Wilson, T. (2001) *Fitting yield curves with long term constraints.*, Technical report, Bacon and Woodrow.
- Soner, H. M., Touzi, N., Zhang, J. (2011) *Quasi-sure stochastic analysis through aggregation*. *Electronic Journal of Probability* 16, no. 67, 1844–1879.
- Tasche, D. (2008) *Capital allocation to business units and sub-portfolios : the Euler Principle*, working paper.
- Wei, G., Hu, T. (2002) *Supermodular dependence ordering on a class of multivariate copulas*. *Statistics and Probability Letters* 57, 357–385.