Couverture du risque de défaut des CDOs

Areski COUSIN

Université Claude Bernard Lyon 1,
ISFA

Groupe de travail - Chaire Risque de Crédit - Evry 31 Janvier 2008
Travail conjoint avec Jean-Paul LAURENT et Jean-David FERMANIAN:
"*Hedging default risk of CDOs in Markovian contagion models*"
disponible sur defaultrisk.com

Introduction

- Marché action, taux d'intérêt : évaluation de produits dérivés basée sur le coût d'une stratégie de couverture
- Sur les marchés des CDOs, ce n'est pas le cas :
  - Interaction entre risque de spread et risque de défaut, grande dimension du portefeuille de crédit, incertitude sur les taux de recouvrement
  - En pratique, couverture locale du risque de spread dans un modèle copule Gaussienne - base corrélation
- Nécessité de relier l'évaluation des dérivés de crédit au prix de la couverture

Introduction

- But de la présentation
  - Étudier le problème de la couverture des CDOs
  - Dans le cadre des modèles de contagion où le risque de défaut gouverne le risque de spread
  - Exposer une méthode pratique de détermination de stratégies de couverture pour des tranches de CDO sur Indice standardisé
- Plan de la présentation
  - Approche théorique
  - Couverture des CDOs à l'aide d'arbres binomiaux
  - Stratégies de replication - CDOs sur indice Itraxx

Temps de défaut

- Portefeuille composé de n références
- $\tau_1, \ldots, \tau_n$: temps de défaut définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
- $N_i(t) = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1, \ldots, n$: indicatrices de défaut à la date t
- $\mathcal{H}_{i,t} = \sigma\left(N_i(s), s \leq t\right)$, $i = 1, \ldots, n$: filtrations individuelles des temps de défaut
- $\mathcal{H}_t = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{H}_{i,t}$: filtration globale des temps de défaut

Temps de défaut

- On suppose qu'il n'y a pas de défauts simultanés : $P(\tau_i = \tau_j) = 0$ pour $i \neq j$
  - Entre t et $t + dt$, l'ensemble des états possibles est de taille $n + 1$: $\{\emptyset, \{1\}, \ldots, \{n\}\}$
  - 2^n états en cas de possibilité de défauts simultanés
- On suppose que les temps de défaut admettent des intensités : il existe des processus α_i^P, $i = 1, \ldots, n$ positifs et $\mathcal{H}_t$-prévisibles tels que :

$$N_i(t) - \int_0^t \alpha_i^P(s) 1_{\{\tau_i > s\}} ds, \quad i = 1, \ldots, n$$

soient des martingales par rapport à la filtration $\mathcal{H}_t$.

Hypothèses de marché

- On suppose qu'il existe sur le marché des CDS digitaux instantanés côtés sur chaque sous-jacent du portefeuille
- Qu'est ce qu'un CDS digital instantané sur le nom i ?
  - Acheteur de protection reçoit 1 en cas de défaut du nom i entre t et $t+dt$
  - En échange, une prime de $\alpha_i^Q(t)dt$ couvrant la période $[t, t+dt]$ est versée au vendeur de protection

$$0 \;\begin{cases} \longrightarrow 1-\alpha_i^Q(t)dt : \text{défaut de } i \text{ entre } t \text{ et } t+dt \\[1em] \longrightarrow -\alpha_i^Q(t)dt : \text{survie de } i \end{cases}$$

$$t \qquad\qquad t+dt$$

  - Cash-flow en $t+dt$: $dN_i(t) - \alpha_i^Q(t)dt$
- Pas de risque de spread spécifique : les primes de CDS, $\alpha_1^Q, \ldots, \alpha_n^Q$, sont supposées être des processus prévisibles par rapport à la filtration $\mathcal{H}_t$ (cadre de BJR(2007), BCJR(2007))

Probabilité risque neutre

- Par absence d'opportunité d'arbitrage, on a :

$$\left\{\alpha_i^Q(t) > 0\right\} \stackrel{P-p.s}{=} \left\{\alpha_i^P(t) > 0\right\}, i = 1, \ldots, n$$

- Sous certaines hypothèses de régularité, il existe une probabilité Q équivalente à P telle que, $\alpha_1^Q, \ldots, \alpha_n^Q$ soient les $(Q, \mathcal{H}_t)$-intensité des temps de défaut (Brémaud, chap.VI)

Couverture et théorème de représentation de martingale

- On cherche à couvrir un actif risqué M, $\mathcal{H}_T$-mesurable, Q-intégrable
- Théorème de représentation de martingale (Brémaud chap. III) : il existe des processus $\mathcal{H}_t$-prévisible, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ tels que :

$$M = E^Q[M] + \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \theta_i(t) \left(dN_i(t) - \alpha_i^Q(t) 1_{\{\tau_i > t\}} dt \right)$$

- Réplication de M en investissant initialement $E^Q[Me^{-rT}]$ dans l'actif sans risque et en prenant en t, sur la période $[t, t + dt]$, une position sur les CDS instantanés des noms survivants
  - Pour le nom i par exemple, prise de position en t sur $\theta_i(t)e^{-r(T-t)}$ CDS instantané relatif au nom i
  - Gain potentiel épargné en $t + dt$ au taux r
  - Perte potentiel emprunté en $t + dt$ au taux r
- Coût de la réplication en t : $V_t = E^Q[Me^{-r(T-t)} | \mathcal{H}_t]$

Modèles de contagion Markovien

- Contagion : les intensités $\alpha_1^Q, \ldots, \alpha_n^Q$ dependent de l'historique complète des défauts
- Cadre Markovien : on suppose que les intensités dépendent uniquement de l'état courant des défauts :

$$\alpha_i^Q \left(t, N_1(t), \ldots, N_n(t)\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

  - Kusuoka(1999), Jarrow et Yu(2001), Yu(2007) : intensités sont des fonctions affines de $N_1(t), \ldots, N_n(t)$

Homogénéité du portefeuille de crédit

- Couverture de tranche de CDO sur indice standardisé
- On suppose que les intensités pré-défaut sont les mêmes pour tous les noms et ne dependent que du processus du nombre de défauts :

$$\alpha_1^Q = \cdots = \alpha_n^Q = \alpha_.^Q(t, N(t))$$

où $N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t)$ (approche mean-field)

  - Formes paramétriques : $\alpha_.^Q(t) = a + bN(t)$, Frey et Backhaus (2007), $\alpha_.^Q(t) = a \times b^{N(t)}$, David et Lo (2001)

- Hypothèse standard d'homogénéité pour la modélisation de la perte agrégée d'un indice standardisé :
  - taux de recouvrement R identique pour tous les noms et déterministe
  - exposition identique pour tous les noms

$$L(t) = (1 - R)\frac{N(t)}{n}$$

Evaluation risque neutre

- Pas de défauts simultanés : l'intensité λ de $N(t)$ est simplement la somme des intensités individuelles des noms survivants :

$$\lambda\left(t, N(t)\right) = \left(n - N(t)\right) \alpha_{\cdot}^{Q}\left(t, N(t)\right)$$

- $N(t)$ est alors une chaîne de Markov à temps continue de matrice génératrice :

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t,0) & \lambda(t,0) & 0 & & 0 \\ 0 & -\lambda(t,1) & \lambda(t,1) & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda(t,n-1) & \lambda(t,n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Correspond à l'approche collective de Schönbucher (2006) ("one step representation of the loss distribution")

Evaluation risque neutre

- Exemple : Evaluation d'une "tranchelet" zero-coupon versant $1_{\{N(T)=k\}}$ en T :
  - Coût de la réplication en t :

$$V(t, N(t)) = e^{-r(T-t)} Q\left(N(T) = k \middle| N(t)\right)$$

  - On peut relier le vecteur des prix $V(t,.) = (V(t,0), \dots, V(t,n))^\top$ au vecteur des cash-flows terminaux $V(T,.) = (\delta_{1,k}, \dots, \delta_{n,k})^\top$ par la matrice de transition $\mathbf{Q}(t,T)$:

$$V(t,.) = e^{-r(T-t)} \mathbf{Q}(t,T) V(T,.)$$

Evaluation risque neutre

- La matrice de transition de $N(t)$ vérifie les équations de Kolmogorov forward et backward :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(t,T)}{\partial t} = -\Lambda(t)\mathbf{Q}(t,T), \quad \frac{\partial \mathbf{Q}(t,T)}{\partial T} = \mathbf{Q}(t,T)\Lambda(T)$$

- Dans le cas d'une matrice génératrice homogène en temps $\Lambda(t) = \Lambda$, la matrice de transition s'exprime simplement comme une exponentielle de matrice :

$$\mathbf{Q}(t,T) = \exp\left((T-t)\Lambda\right)$$

- Approche mise en pratique par van der Voort (2006), Herbertsson et Rootzén (2006), Arnsdorf et Halperin (2007), Kock et Kraft (2007), Epple et al. (2007), Herbersson (2007) et Lopatin et Misirpashaev (2007)

Détermination des stratégies de réplication

- Couverture d'un CDO zero-coupon de prix de réplication $V(t, N(t))$ par un Indice zero-coupon de prix de réplication $V_I(t, N(t))$
- Par homogénéité du portefeuille de crédit, $dN(t) = \sum_{i=1}^{n-N(t)} dN_i(t)$ et en appliquant la formule d'Itô à V et V_I, on peut exprimer la dynamique de V et de V_I en fonction de celle des CDS digitaux instantanés :

$$dV(t, N(t)) = rV(t, N(t))dt \ +$$

$$\sum_{i=1}^{n-N(t)} \left(V(t, N(t)+1) - V(t, N(t))\right) \times \left(dN_i(t) - \alpha_i^{Q}(t, N(t))dt\right)$$

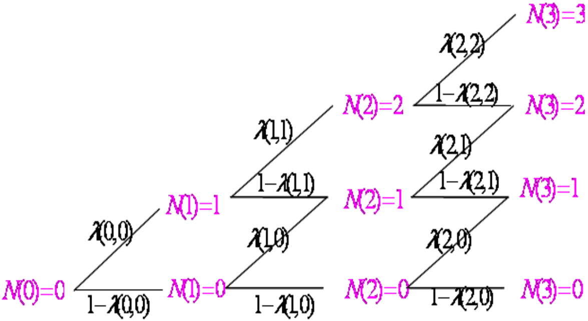
- la dynamique de V peut alors s'exprimer en fonction de celle de V_I :

$$dV(t, N(t)) = r \times \left(V(t, N(t)) - \delta_I(t, N(t)) V_I(t, N(t))\right) dt + \delta_I(t, N(t)) dV_I(t, N(t))$$

$$\text{où } \delta_I(t, N(t)) = \frac{V(t, N(t)+1) - V(t, N(t))}{V_I(t, N(t)+1) - V_I(t, N(t))}$$

Evaluation et Couverture dans un arbre

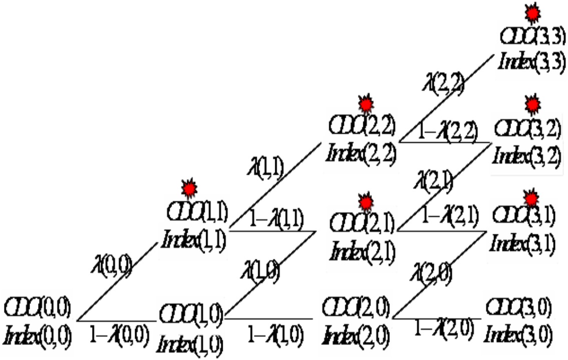
- Version discrète du modèle de contagion Markovien : Arbre binomial des états



- $\lambda(0,0), \lambda(1,0), \lambda(1,1), \lambda(2,0), \ldots$ peuvent être calibrés à partir d'une "loss surface" de marché par une procédure forward

Evaluation et Couverture dans un arbre

- Calcul des prix des tranches de CDO et de l'indice dans l'arbre par procédure backward

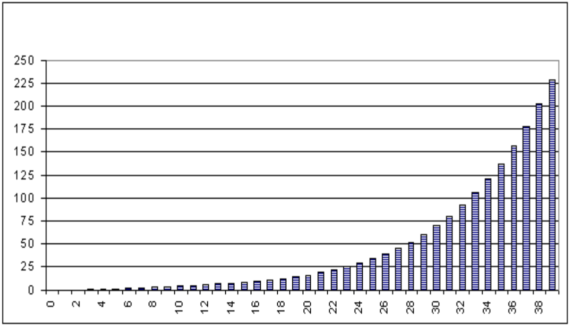


- Calcul des ratio de couverture :

$$\delta_I(t,k) = \frac{CDO(t+1,k+1) - CDO(t+1,k)}{Index(t+1,k+1) - Index(t+1,k)}$$

Résultats et remarques

- Couverture de tranche de CDO sur indice Itraxx : $n = 125$ références, taux d'intérêt $r = 3\%$, taux de recouvrement $R = 40\%$, maturité $T = 5$ ans
- Intensité homogène en temps : $\lambda(t, k) = \lambda(k)$, $k = 0, \ldots, 125$
- Calibration des $\lambda(k)$, $k = 0, \ldots, 125$ à partir de données de marché :



Résultats et remarques

- Dynamique des spreads d'indice en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	Weeks			
	0	14	56	84
0	20	19	17	16
1	0	31	23	20
2	0	95	57	43
3	0	269	150	98
4	0	592	361	228
5	0	1022	723	490
6	0	1466	1193	905
7	0	1870	1680	1420
8	0	2243	2126	1945
9	0	2623	2534	2423
10	0	3035	2939	2859

Résultats et remarques

- Dynamique des deltas tranche equity $[0, 3\%]$ en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	OutStanding Nominal	Weeks			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.541	0.617	0.823	0.910
1	2.52%	0	0.279	0.510	0.690
2	2.04%	0	0.072	0.166	0.304
3	1.56%	0	0.016	0.034	0.072
4	1.08%	0	0.004	0.006	0.012
5	0.60%	0	0.002	0.002	0.002
6	0.12%	0	0.001	0.000	0.000
7	0.00%	0	0	0	0

Résultats et remarques

- Dynamique des deltas tranche mezzanine $[3\%, 6\%]$ en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	OutStanding Nominal	Weeks			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.139	0.134	0.096	0.060
1	3.00%	0	0.168	0.197	0.179
2	3.00%	0	0.118	0.197	0.268
3	3.00%	0	0.061	0.111	0.187
4	3.00%	0	0.029	0.049	0.085
5	3.00%	0	0.016	0.021	0.034
6	3.00%	0	0.016	0.012	0.014
7	2.64%	0	0.022	0.011	0.008
8	2.16%	0	0.031	0.014	0.007
9	1.68%	0	0.031	0.020	0.010
10	1.20%	0	0.023	0.021	0.013
11	0.72%	0	0.014	0.014	0.012
12	0.24%	0	0.005	0.005	0.005
13	0.00%	0	0	0	0

Résultats et remarques

- Comparaison entre deltas trader (salle de marché) et deltas de réplication :

	[0-3%]	[3-6%]	[6-9%]	[9-12%]	[12-22%]
market deltas	27	4.5	1.25	0.6	0.25
model deltas	21.5	4.63	1.63	0.9	0.6

Conclusion

- Sous certaines hypothèses :
  - Pas de défauts simultanés
  - Risque de spread gouverné par le risque de défaut
- Marché complet : couverture de tranches de CDO avec des CDS digitaux instantanés associés aux références du portefeuille sous-jacent
- Dans un cadre un peu plus restrictif :
  - Cadre Markovien
  - Homogénéité du portefeuille de crédit
- Il est possible de répliquer parfaitement des tranches de CDO avec l'indice et l'actif sans risque
- Mise en oeuvre simple et rapide d'une méthode de calcul des ratios de couverture