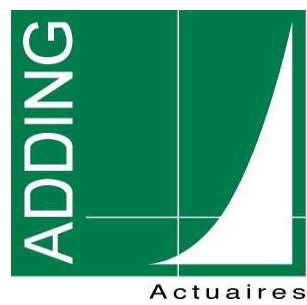


Valorisation et Comptabilisation des Stock-Options à travers la norme IFRS 2

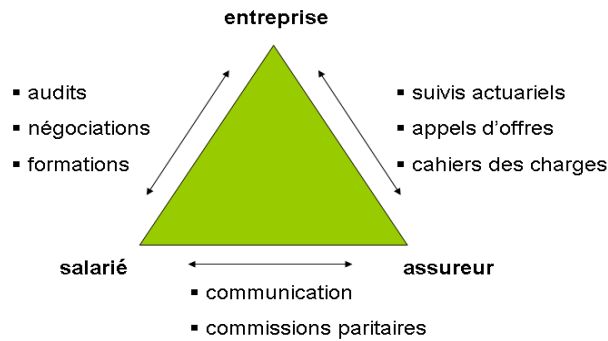
Areski COUSIN

30 mars 2006

Mémoire de Master 2 Recherche
Master Sciences Actuarielle et Financière
ISFA - Université Lyon 1
Du 1^{er} avril au 31 juillet 2005 dans la société
Adding Actuaire Conseil
46 bis, chemin du Vieux Moulin
69160 TASSIN
Tel : 04 72 18 58 52
Fax : 04 72 18 58 48
adding@adding.fr
www.adding.fr



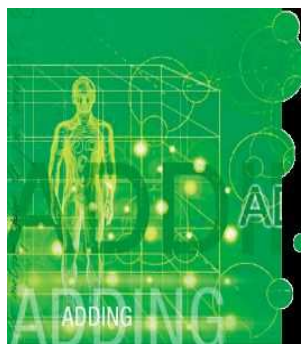
ADDING est née en 1993 du regroupement de plusieurs compétences sur les différents domaines de la protection sociale en entreprise : experts, actuaires et auditeurs. Leader de l'audit actuariel en entreprise, la société travaille avec un grand groupe sur trois en France. Composée de 28 actuaires experts et 53 salariés au total (sur ADDING GROUP), ses activités de conseil sont indépendantes de tout organisme assureur. Ses champs d'activité rassemblent les systèmes de retraite, préretraite, prévoyance, remboursement de frais de santé et épargne salariale. Les interlocuteurs directs sont les Compensation & Benefits Manager, les DRH et les DAF (Directeur Analyste Financier). Les activités d'ADDING peuvent être synthétisées dans le schéma ci-dessous :



Les consultants peuvent intervenir à plusieurs niveaux :

- en conseillant l'entreprise sur le choix des organismes assureurs dans le cadre d'un appel d'offre sur des conventions collectives. Pour cela, grâce aux données fournies sur les salariés, l'équipe d'actuaires peut effectuer une tarification des contrats a priori. L'expérience acquise dans le secteur de l'actuariat d'entreprise conduit alors à l'élaboration d'études comparatives sur les tarifs proposés par les assureurs.
- en apportant un savoir faire précieux sur des missions d'audit : calcul d'engagement dans le cadre des avantages aux personnels (IAS19), problématiques des normes IFRS.
- en agissant entre l'entreprise et les salariés dans le cadre de formation en prévoyance, santé, et retraite mais également en développant des outils d'aide à la communication notamment sur la rémunération globale des employés.

Enfin, ADDING fait partie du groupe ADDING GROUP qui comprend également la société ACTUARIS spécialisée dans le conseil au compagnie d'assurance.



Abstract

In this paper, we replace the fair valuation of Employee Stock Option (ESO) into the context of the accounting standard IFRS 2. We introduce a model that captures the main properties that characterize ESO, in particular, the vesting period, the likelihood of early voluntary exercise and the obligation to exercise immediately if the employee leaves the firm. We derive an analytic formula for the price of ESO and analyze its properties and sensitivity with respect to the model parameters. We adapt our model for an actuarial application with a risk group estimation of the parameters and explain the main principle of accountancy with IFRS 2.

Table des matières

Introduction	3
1 La norme IFRS 2 et les plans de Stock-Options : les points clés	5
1.1 Le contexte historique	5
1.1.1 Aux Etats-Unis	5
1.1.2 En Europe	6
1.1.3 En France	6
1.1.4 Qui est concerné par la rémunération en capitaux propres ?	6
1.2 Les plans de stock-options sous IFRS 2	7
1.2.1 Les notions clés	7
1.2.2 L'évaluation de la juste valeur des stock-options attribuées	8
1.2.3 L'évaluation de la juste valeur des actions attribuées	10
1.3 Conclusion	11
2 Valorisation des Stock-Options	13
2.1 Introduction	13
2.1.1 État des lieux des travaux effectués sur le sujet	13
2.1.2 Le modèle retenu	14
2.2 Approche Analytique	16
2.2.1 Description du modèle	16
2.2.2 Calcul de la valeur de l'option	19
2.3 Approche par simulation de Monte-Carlo	21
2.3.1 Préliminaire	21
2.3.2 Quelles méthodes de simulation choisir ?	21
2.3.3 Des simulations au cas par cas	22
2.3.4 Vitesse de convergence	23
2.4 Analyse pour une application actuarielle, Résultats et Commentaires	25
2.4.1 Regroupement des individus par classe de risque	25
2.4.2 Estimation des paramètres pour l'exercice anticipé	25
2.4.3 Résultats et Commentaires	27
2.5 Limites du modèle et améliorations possibles	31
3 Comptabilisation des Stock-Options	33
3.1 Le Principe	33
3.2 Un exemple illustratif	34
3.3 Les actions gratuites : une remise en cause des stock-options ?	35
Conclusion	37
Références	37
Annexe	40

A	Calcul des sous-options	41
A.1	Calcul du prix de l'option dans le scénario A	41
A.2	Calcul du prix de l'option dans le scénario B	42
A.3	Calcul du prix de l'option dans le scénario D	43
A.4	Calcul du prix de l'option dans le scénario C	45
B	Quelques outils mathématiques . . .	51
B.1	Processus à intensité	51
B.1.1	Processus de Cox	51
B.2	Quelques outils mathématiques pour le calcul des sous-options	52
B.2.1	Exponentielle-gaussienne	52
B.2.2	Loi normale bivariée	52

Introduction

Depuis les années 1990, actions et options sur actions deviennent fréquemment des éléments de rémunération pour les dirigeants et, de plus en plus, pour les collaborateurs. Le nombre d'instruments de capitaux propres remis au personnel dans les entreprises a considérablement augmenté car ils offrent des primes très intéressantes tout en préservant les liquidités de l'entreprise. Néanmoins, à la suite de plusieurs faillites retentissantes et de scandales concernant les rémunérations, on s'est ému de l'opacité qui entoure l'utilisation des actions et options comme éléments complémentaires du salaire. C'est pourquoi, l'International Accounting Standards Board (IASB) a pris l'initiative de publier la norme IFRS 2 dont le but est d'imposer une plus grande transparence concernant la comptabilisation des paiements en actions. En effet, il s'agit d'évaluer à la juste valeur, tous les paiements fondés sur des actions, comme les plans de stock options ou les "Stock Appreciation Rights" (forme d'incitation où la prime est indexée sur le cours boursier de l'entreprise).

Ce mémoire se divise en trois parties. La première est essentielle à la compréhension globale de l'étude puisqu'elle met en relief les points clés de la norme IFRS 2 portant sur l'évaluation des instruments de capitaux propres à leur juste valeur. Elle se focalise en particulier sur le fonctionnement des plans de stock options et met en exergue les éléments que la norme préconise d'utiliser lors de l'évaluation. La deuxième partie constitue le cœur du mémoire puisqu'elle répond à la problématique établie dans la première partie. Le succès des stock-options Outre Atlantique et la mise en application des nouvelles normes comptables ont favorisé l'émergence d'une littérature abondante dans le domaine. Cependant, il n'existe que peu de papier qui traite spécifiquement de l'évaluation et la comptabilisation de telles options dans l'esprit de la norme IFRS 2. On peut citer l'article de Frédéric Planchet et Pierre Therond (2003) [18] qui pose les bases réglementaires et fiscales des plans de stock-options et évalue l'engagement "fair value" de l'entreprise à l'aide d'un modèle simple. Les auteurs adoptent une approche actuarielle en évaluant la valeur des options relativement aux caractéristiques de chaque employé. La troisième partie aborde les aspects comptables de la norme IFRS 2.

Chapitre 1

La norme IFRS 2 et les plans de Stock-Options : les points clés

En premier lieu, il faut souligner que IFRS 2 concerne toutes les transactions dont le paiement est fondé sur des actions, que les dites transactions soient réalisées avec des salariés ou avec d'autres tiers, par exemple des fournisseurs. Publiée le 19 février 2004 par l'IASB et le 4 février 2005 par la Commission Européenne au JOCE¹, son objectif est de refléter dans le compte de résultat et dans le bilan l'impact financier de ces transactions. Pour ces dernières, la norme en distingue plusieurs, selon que le paiement soit fondé sur des actions réglées :

- en instruments de capitaux propres : attribution d'actions gratuites ou d'options d'achat ou d'option de souscription par exemple.
- en trésorerie, comme par exemple un bonus basé sur l'évolution du cours de bourse mais versé en cash.
- en laissant le choix des deux formules précédentes au bénéficiaire ou à l'entreprise.

Pour les entreprises cotées, l'IFRS 2 est rentrée en vigueur le 1er Janvier 2005. Elle est également applicable pour les instruments de capitaux propres octroyés après le 7 novembre 2002 pour lesquels les salariés n'ont pas complètement acquis leur droit d'exercice au 1er Janvier 2005. Cependant, elle concerne particulièrement les entreprises qui utilisent des plans de stock-options pour rémunérer leur employés. En effet, la norme impose d'inscrire en charge la "juste valeur" des stock-options à leur date d'attribution. La principale difficulté réside alors dans la valorisation de telles options qui, comme nous allons le voir, possèdent des caractéristiques bien différentes des options classiques. Cependant, avant de rentrer dans la partie technique de ce projet, il est essentiel de cerner, les enjeux de la nouvelle norme :

- en rappelant l'évolution de la réglementation au niveau mondial.
- en expliquant le fonctionnement d'un plan de stock-option
- en analysant les contraintes imposées par IFRS 2 pour l'évaluation à la juste valeur.

1.1 Le contexte historique

1.1.1 Aux Etats-Unis

La réglementation américaine concernant la comptabilisation des stock-options est relativement ancienne. Le FASB (Financial Accounting Standards Board), organe de normalisation américain, a présenté deux normes :

1. La première, APB 25 –Accounting for Stock Issued to Employees– basée sur la valeur intrinsèque réglemente depuis 1972 le traitement comptable des options d'achat d'actions accordées aux employés dans le cadre de leur rémunération. Il s'agit d'enregistrer dans les comptes le coût de rémunération

¹Journal Officiel de la Commission Européenne

correspondant à la **valeur intrinsèque de l'option**. Le calcul est réalisé sitôt que sont connus le nombre de parts et le prix d'exercice de celles-ci. En somme, l'entreprise doit inscrire en charge de rémunération la différence entre le prix de souscription potentielle et la valeur de marché des actions. C'est ce mode de comptabilisation qui a permis le succès des stock-options : ces options étant en général octroyées "at-the-money", le coût des plans de stock-options était donc nul. L'utilisation abusive de ce mode de rémunération par rapport à l'information comptable a conduit à l'élaboration d'une norme plus strict.

2. La seconde norme SFAS 123 –Accounting for Stock-Based Compensation– [5] basée sur le concept de "**juste valeur**" ou "**fair value**", fut instaurée en 1995. Le coût des options est, cette fois-ci, mesuré à la date d'attribution en fonction de la valeur de l'octroi et est actualisé sur la période de service soit, généralement, la période d'acquisition des droits. La charge dans ce dernier cas est étalée sur la durée de l'option.

Il faut noter que jusqu'en 2004, les entreprises américaines ont pu choisir entre ces deux modes de comptabilisation. Cependant, le 16 décembre 2004, le FASB publie la version révisée finale de la norme SFAS 123 sur les stock-options : les sociétés publiques cotées sur les bourses américaines doivent comptabiliser à la "juste valeur" une charge pour les plans de stock-options à partir des exercices financiers suivant le 15 juin 2005.

1.1.2 En Europe

Le 20 décembre 2004, l'Union Européenne a approuvé le texte de la norme IFRS 2 [1] à la quasi-unanimité des États membres siégeant au comité de réglementation comptable. L'IFRS 2 fait partie de la "plate-forme stable" des normes comptables que toutes les sociétés européennes cotées doivent appliquer à l'occasion de leur passage aux normes comptables internationales. Cette dernière annule et remplace à compter du 1er Janvier 2005 toutes les dispositions de la norme IAS 19 concernant les avantages du personnel relatifs aux capitaux propres. Auparavant, les coûts des transactions étaient figurés uniquement dans les notes afférentes aux états financiers. Avec IFRS 2, les sociétés cotées sur une bourse européenne doivent désormais refléter dans leurs comptes de résultats le coût d'attribution des actions et des stock-options.

1.1.3 En France

Les plans d'options sur actions (POA) ont été introduits en France par la loi du 31 décembre 1970 qui autorise toutes les sociétés par actions, qu'elles soient cotées ou non en Bourse, à offrir à certains salariés ou à l'ensemble du personnel des options de souscription ou d'achat d'actions. D'abord peu utilisées, les stock-options se sont développées à la fin des années 80 avec les privatisations et la loi sur l'épargne (1987), mais surtout depuis le milieu des années 90 avec la publication en France du Rapport Viénot (1995) sur le gouvernement d'entreprise qui préconise les stock-options comme instrument privilégié du contrôle par le conseil d'administration de la rémunération des dirigeants.

1.1.4 Qui est concerné par la rémunération en capitaux propres ?

Les plans de stock-options concernent 80% des entreprises du CAC40 mais seulement 1% des salariés sont concernés par ce mode de rémunération. En France, pour les seules entreprises cotées au CAC 40, 37 649 cadres supérieurs (1 % des salariés de ces entreprises) détenaient des stock-options à la fin février 2001. Leur prix de marché était évalué à 48,6 milliards de francs, soit une moyenne de 1,3 million de francs par bénéficiaire, après avoir atteint 64,7 milliards en juin 2000 au moment où la Bourse était au plus haut. Mais, il ne s'agit que d'une moyenne... Les membres des comités de direction (environ 450 personnes) détenaient pour 27,8 millions de francs, alors que les 40 PDG détenaient pour 125 millions de francs chacun !

1.2 Les plans de stock-options sous IFRS 2

1.2.1 Les notions clés

Ce paragraphe s'efforce de poser les fondations de l'étude. Il s'agit donc d'un passage inévitable pour la compréhension globale des plans de stock-options à travers la norme IFRS 2.

C'est le conseil d'administration de l'entreprise qui décide du lancement d'un plan de stock-options et qui fixe les règles contractuelles relatives à l'exercice des options. Voici donc les éléments clés de ces contrats :

La date d'attribution ou "grant date" T_a

Il s'agit de la date du jour où le droit est accordé. Elle figure dans la lettre de notification individuelle reçue par le salarié. A cette date, la juste valeur des options doit être calculée individuellement et placée en charge dans le compte résultat. De plus, la valeur des options n'est plus modifiable par la suite ², seul le nombre de bénéficiaires est réévalué chaque année en fonction du turnover. Il est donc essentiel de prendre en compte le maximum d'informations pour la valorisation individuelle des options car celles-ci sont évaluées une fois seulement pour une période qui peut excéder 10 ans.

La période d'indisponibilité ou "vesting period" $[T_a, T_0]$

Entre T_a et T_0 , les bénéficiaires ne peuvent pas exercer leurs options. Cela revient à imposer une durée minimale de service dans l'entreprise. Ainsi, dans le cas d'un départ volontaire du salarié, d'une démission ou d'un licenciement pendant cette période, les options détenues par le salarié sont définitivement perdues. Cependant, il existe des exceptions :

- En cas d'opération financière menée sur le capital de l'entreprise (offre publique par exemple) ou lors d'une fusion-absorption de l'entreprise par une autre, le bénéficiaire des options pourra exercer tout ou partie de ses options pendant la durée de l'opération.
- En cas de départ à la retraite, le président est autorisé à permettre au bénéficiaire de conserver ses options.
- En cas de décès du bénéficiaire, les héritiers pourront exercer les options dans un délai de 6 mois (valable également si le décès a lieu pendant la période d'acquisition)

Au plan de l'écriture comptable, il faut déterminer l'évolution du produit du nombre de stock-options par le nombre de bénéficiaires, en établissant une prévision des départs avant la date de "vesting" T_0 : l'objectif est d'établir chaque année, le nombre exact d'option exerçable en prenant en compte le turnover. Ce point sera détaillé dans le chapitre 3.

Les conditions de performances

Le droit d'exercice des stock-options peut également être conditionné par des performances liées au marché ou des performances indépendantes du marché.

- **les conditions de marché**

L'acquisition du droit d'exercice dépend du prix de marché du sous-jacent ; en d'autres termes, du cours de l'action côté de l'entreprise. Par exemple, la valeur de l'action doit augmenter de $x\%$ ou atteindre un certain niveau pour que l'attribution soit définitivement acquise. Ces critères de performance sont rarement utilisés en France mais ils sont fréquemment introduits dans des plans d'options d'entreprises anglaises ou hollandaises par exemple.

- **les conditions hors marché**

L'objectif à atteindre est déconnecté de la valeur de marché du sous-jacent. Il peut s'agir d'un niveau de chiffre d'affaires ou de bénéfice par exemple.

Seules les conditions de marché doivent être prises en compte lors de la valorisation des stock-options. ³

²IFRS 2 : paragraphe 23

³IFRS 2 : paragraphe 19-21

La période d'exercice $[T_0, T]$

C'est la période pendant laquelle les options peuvent être exercées, la date T étant la date d'échéance des options. Cependant, le conseil d'administration a le droit de suspendre le droit de lever les options pendant un délai qui ne peut excéder 3 mois en cas d'opération exigeant une connaissance exacte et préalable du nombre d'actions composant le capital social (augmentation de capital ou émission de valeur mobilières donnant accès au capital, fusion ou scission, regroupement ou division d'actions par exemple)

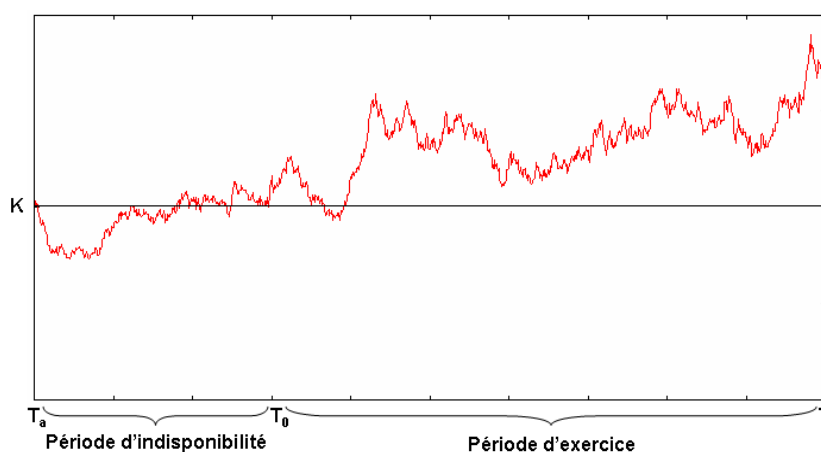
Le prix d'exercice des options : K

La norme IFRS 2 n'impose aucune restriction sur la détermination de ce prix. En général, l'option est attribuée "in-the-money" : le prix d'exercice de l'option est inférieur ou égale au prix de marché de l'action sous-jacente. Ce dernier est décidé lors du conseil d'administration. Cependant, la réglementation antérieure imposait, pour les entreprises cotées, de prendre la moyenne des cours de l'action sur les 20 dernières séances de bourse.

La clause de rechargement

Il est possible d'attribuer de nouvelles options lors de l'exercice des stock-options. La clause de rechargement ne doit pas être prise en considération lors de l'estimation de la juste valeur des options à la date d'attribution. Cependant, les nouvelles options attribuées sont soumises à la même réglementation.⁴

Voici un schéma qui illustre les notions rencontrées plus haut :



1.2.2 L'évaluation de la juste valeur des stock-options attribuées

En général, les options accordées aux membres du personnel ont des caractéristiques qui les distinguent fortement des options qui pourraient être cotées sur un marché pour le même sous-jacent. Il faut donc utiliser un modèle d'évaluation qui prend en compte un certain nombre de facteurs. Ces derniers, comme l'indique la norme⁵, seraient ceux qu'utiliserait un intervenant du marché bien informé et consentant dans son modèle d'évaluation.

Voici les éléments qui peuvent affecter la valeur des options. Par soucis de présentation, ils ont été séparés en trois classes : les facteurs contractuels définis lors du conseil d'administration, les facteurs directement liés au marché et les facteurs propres au bénéficiaire.

Les facteurs contractuels

Ils ne posent aucun problème d'estimation car ils sont définis initialement.

⁴IFRS 2 : paragraphe 22

⁵IFRS 2 : Annexe B5

1. **le prix d'exercice de l'option K**

2. **la durée de vie de l'option $[T_a, T]$**

3. **la période d'indisponibilité ou d'acquisition des droits $[T_a, T_0]$**

Il est impératif de prendre en compte la durée pendant laquelle les options ne peuvent être exercées.

4. **les conditions de marché**

Nous avons vu que les conditions de marché (atteinte d'une barrière pour le cours de l'action comme pour les options exotiques up and in) doivent être intégrées dans le modèle d'évaluation.

Les facteurs liés au marché

Ils nécessitent un effort de recherche de données et d'estimation.

1. **le prix des actions sous-jacentes à la date d'acquisition**

2. **la volatilité des actions sous-jacentes**

C'est un facteur très important car la durée de vie des options est grande et une mauvaise estimation de la volatilité peut entraîner une évaluation erronée du prix de l'option. De plus, c'est parfois un paramètre délicat à estimer. Lorsque cela est possible, la norme recommande d'interpoler la volatilité de l'action à partir des volatilités implicites des options cotées ou bien d'instruments qui comprennent des caractéristiques d'options (comme par exemple une dette convertible). Si ce n'est pas possible, il faudra calculer la volatilité historique de l'action en se basant sur une durée comparable à la durée de vie des stock-options. De plus, il est précisé de prendre en compte la tendance de la volatilité à revenir vers sa moyenne et des facteurs indiquant que la volatilité future pourrait différer de la volatilité passée (par exemple, si le prix de l'action a été très volatile pendant une période d'OPA avortée).

- Si une entité récemment cotée n'a pas assez d'informations sur la volatilité historique, elle doit prendre en compte toute la durée disponible de cotation. Elle peut également se référer à la volatilité historique d'entreprises du même secteur.
- La remarque précédente est également valable pour les entreprises non cotées (cas de Start-Up par exemple). Cependant, ces entreprises peuvent avoir mis en place un marché interne d'actions qui pourrait servir à calculer la volatilité.

3. **les dividendes attendus sur les actions.**

L'exercice des options est souvent avantageux juste avant le détachement d'un dividende. Or l'exercice n'est possible que pendant la période $[T_0, T]$. Il faudra donc prendre en compte les dividendes (pour un modèle analytique, sous forme de taux continu estimé à partir des valeurs historiques constatées) uniquement pendant la période où le droit est accordé.

4. **le taux d'intérêt sans risque pour la durée de vie de l'option.**

Il correspond en général au taux d'une obligation d'état de maturité équivalente à la durée de vie estimée de l'option et dont la devise d'émission est égale à la devise dans laquelle le prix d'exercice de l'option est exprimé.

5. **l'effet dilutif**

Si l'on imagine un gâteau (représentant la richesse de l'entreprise) découpé en part (les actions). L'émission d'action nouvelle au prix d'exercice (inférieur au prix du marché) revient à diviser à nouveau le gâteau en part plus petite : c'est l'effet dilutif. Ainsi, deux situations sont possible :

- soit le porteur de l'option ne réalise pas à l'exercice un profit aussi important qu'en exerçant une option cotée similaire sans effet dilutif sur le prix de l'action. Donc l'option a une valeur plus faible qu'une option cotée classique.
- soit le marché s'attend à ce qu'une attribution de stock-options ait lieu. Il répercute alors cette information sur le prix de l'action avant la date d'attribution. Dans ce cas, cela n'a pas d'incidence sur l'évaluation.

Les facteurs individuels

Les membres du personnel exercent souvent leurs options de façon anticipée essentiellement car elles sont non échangeables⁶. Cela oblige souvent les bénéficiaires à procéder à un exercice anticipé de leur options car c'est la seule manière de liquider leur position.

1. L'effet psychologique

L'expérience peut démontrer que les membres du personnel tendent à exercer les options dès que le prix du sous-jacent atteint un niveau spécifié au-delà du prix d'exercice. On pourrait émettre l'hypothèse que ce niveau psychologique varie en fonction de l'évolution récente du cours.

2. L'âge du bénéficiaire et son ancienneté dans l'entreprise

En cas de décès, de démission ou de licenciement pendant la période d'exercice, l'expérience montre que les options sont exercées juste avant le départ du salarié si leur valeur intrinsèque est positive. Il est donc important d'intégrer le taux de turnover, et la probabilité de décès dans le modèle.

La prise en compte de ces facteurs d'exercice anticipé est fondamentale pour l'évaluation des options. En effet, l'exercice ayant lieu plus tôt que prévu, les bénéficiaires abandonnent la "time value" restante de leur option⁷. Des modèles trop simplistes comme celui de Black & Scholes sur-estiment donc la valeur de ces options. Il faut donc intégrer lors du processus d'évaluation, des paramètres qui permettent de décrire fidèlement le comportement d'exercice des détenteurs de ces options non cessibles. A ce sujet, IFRS 2 propose d'utiliser le modèle de Black-Scholes avec une échéance égale à l'estimation de la durée de vie moyenne d'une option. Il est suggéré de séparer la masse des bénéficiaires en groupe constitué d'individus ayant un comportement semblable à l'exercice⁸.

1.2.3 L'évaluation de la juste valeur des actions attribuées

IFRS 2 consacre seulement deux petites sections à la détermination de la juste valeur des actions. En effet, il n'est pas difficile de trouver un prix de marché pour des actions. Cependant, la juste valeur au sens de la norme doit intégrer plusieurs éléments comme :

1. le droit ou non au dividende durant la période d'acquisition des droits.
2. les restrictions de transfert possible des actions après la date d'acquisition des droits.

En France, la loi de finances 2005⁹ prévoit expressément la possibilité d'attributions d'actions gratuites aux salariés ou mandataires sociaux désignés par l'entreprise dans des conditions fiscales et sociales avantageuses similaires à celles des stock-options.

⁶IFRS 2 : Annexe B16-B21

⁷Abandon de la valeur probable de l'option en cas de hausse du sous-jacent pendant la période restante

⁸IFRS 2 : Annexe B19

⁹Article 83

1.3 Conclusion

La norme n'impose aucun modèle pour évaluer les options à leur juste valeur. Cependant, pour des options à durée de vie contractuelle courte, ou qui doivent être exercées dans un délai assez court après la date d'acquisition des droits, la norme préconise l'utilisation de la formule Black & Scholes peu flexible mais simple d'utilisation. Or, la plupart des attributions d'instruments de capitaux propres possèdent une maturité lointaine. Typiquement, la durée de vie des stock-options varie entre 5 et 10 ans, avec une période d'indisponibilité de 3 ans. Il s'agit donc d'évaluer une option de type bermudienne : à caractère européen sur la période d'indisponibilité $[T_a, T_0]$, puis américain sur la période d'exercice $[T_0, T]$. En plus de cela, les éléments non standards que la norme impose d'intégrer dans le modèle d'évaluation sont assez nombreux : les conditions de marché, l'exercice anticipé (effet psychologique, turnover, décès), la dilution des actifs. Cependant, il est clairement indiqué dans la norme que les conditions d'acquisition autres que celle de marché ne doivent pas être prises en compte lors du calcul de la juste valeur des actions, ou options sur action : les conditions de service ou de bénéfice sont donc à exclure du modèle d'évaluation (elles doivent néanmoins être considérées pour la réévaluation annuelle du nombre de bénéficiaires potentiels : voir Chapitre 3). Les modèles de valorisation classiques type Black-Scholes ont été développés pour des options négociables, c'est à dire en supposant que l'optionnaire a le choix entre exercer immédiatement ou vendre l'option sur le marché : nous verrons qu'ils sur-estiment largement la valeur de ces options et pénalisent de ce fait l'information comptable. Ainsi, les éléments que la norme préconise de prendre en compte laissent libre cours à l'élaboration de modèles plus raffinés pour le calcul de la juste valeur des stock-options.

Chapitre 2

Valorisation des Stock-Options

2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu, les "Employee Stock-Options" (ESO) attribuées dans le cadre d'une rémunération complémentaire des salariés sont des options américaines qui possèdent les caractéristiques suivantes : période d'indisponibilité (delayed vesting), non négociabilité, exercice anticipé, dilution, sans compter les éléments que la norme met à l'écart pour la valorisation. Ces options représentent un engagement pour l'entreprise qu'il faut désormais évaluer le plus justement possible et à la date d'attribution.

2.1.1 État des lieux des travaux effectués sur le sujet

A l'origine, les stock-options étaient valorisées par leur valeur intrinsèque à la date d'attribution (APB 25), ce qui rendait inexistant tout modèle d'évaluation, d'autant plus que ces options étaient en général attribuées "at-the-money". Les nouvelles normes SFAS 123 (du côté américain) et IFRS 2 (du côté européen) imposent de prendre en compte à la fois le comportement d'exercice anticipé des bénéficiaires, qui diminue significativement la valeur des options et les classes de risques différentes suivant les individus. Il est alors préconisé le recours au modèle de Black-Scholes (1973) [4] appliqué à des groupes de bénéficiaires de caractéristiques différentes, la maturité étant ramenée à la durée de vie attendue des options correspondante à chaque classe de risque. Cependant, même si ce modèle est très avantageux d'un point de vue pratique (compréhensible, maniable, mise en œuvre simple et rapide), il sous-estime la valeur des options.

Le grand succès des stock-options dans les années 90 d'une part et l'arrivée des nouvelles normes comptables d'autre part ont conduit de nombreux analystes et chercheurs à se pencher sur le problème de l'évaluation. En particulier, Rubinstein (1995) [22] a effectué une étude générale sur les caractéristiques spécifiques aux stock-options, les paramètres qui impactent la valorisation et leur sensibilité. Pour cela, en utilisant un modèle d'arbre binomiale, l'influence de chaque paramètre est analysée par comparaison du résultat avec celui obtenu par Black-Scholes dans le cas d'options classiques. De par leur flexibilité, les modèles binomiaux ont été employés par un grand nombre de chercheurs dans une optique d'évaluation mais aussi d'analyse comparative des paramètres. Parmi eux, Carpenter (1998) [7] compare une approche d'utilité attendue avec arbres binomiaux (valorisation du point de vue de l'employé) et l'introduction d'un temps d'arrêt modélisant le départ prématuré du bénéficiaire (valorisation du point de vue de la firme). De plus, elle effectue une étude empirique minutieuse sur le comportement d'exercice des bénéficiaires.

On peut noter qu'il existe en fait deux façons de voir le pricing des stock-options : Hall-Murphy (2002) [13] se fonde sur l'étude de Carpenter pour conclure que la valeur des options est bien différente selon qu'il s'agit du point de vue du dirigeant ou celui de la firme. Chance et Yang (2004) [9] s'attachent en particulier à la valeur des options du côté de l'employé en étudiant l'effet des dividendes sur la valorisation. De façon général, les employés ont plutôt une aversion pour le risque et ne peuvent pas, de surcroît, diversifier ce risque sur le marché. A l'opposé, l'entreprise via ses actionnaires a la possibilité de se couvrir face à ce risque : les options possèdent alors une valeur plus importante vue de la firme. Cette dernière mise donc sur l'aspect

stimulant de ce mode de rémunération pour compenser la perte en valeur (et même espérer mieux) liée à l'attribution des options. Comme on a pu le voir, La norme IFRS 2 concerne la valorisation de l'engagement de l'entreprise, c'est donc l'approche liée à la firme qui nous intéresse. Pour finir avec les modèles binomiaux, on peut citer Hull et White (2004) [14] qui se placent du point de vue de l'entreprise et modélisent l'exercice anticipé des bénéficiaires par deux facteurs supposés indépendants : le taux de départ ("exit rate") relatif au départ volontaire ou non du salarié d'une part et l'effet psychologique dû à la hausse du cours (exercice si dépassement d'une barrière) d'autre part. Ainsi, par rapport à cette dernière supposition, lorsqu'un employé possède une option fortement "in-the-money", il aura tendance à l'exercer par peur d'une éventuelle retombée des cours. Et la barrière représente le compromis limite entre la peur du risque de chute des cours et la perte de la valeur temps de l'option. Cette approche est à la base des modèles analytiques les plus récents. En parallèle avec l'engouement rattaché au pricing des options exotiques, plusieurs auteurs ont élaborés des formules fermées dans le cadre si particulier des ESO. La plupart de ces modèles utilisent un temps d'arrêt (le premier instant de saut d'un processus de Poisson) pour décrire l'exercice anticipé des options. Ces modèles, bien connus sous le nom de modèle à intensité, ont eu un énorme succès pour modéliser la structure par terme des taux d'intérêt ou encore pour évaluer des dérivées de crédit en présence de risque de défaut : de nombreux résultats sont donc exploitables (voir [17]). Ainsi, Carr et Lenetsky (2000) [8] ont développé une formule fermée exclusivement basée sur le taux de départ et élaborent deux approches : une intensité constante et plus importante dans le cas d'une option "in-the-money" et une intensité croissante en fonction de la valeur intrinsèque (plus l'option est "in-the-money", plus elle aura tendance à être exercée rapidement). Les auteurs ne prennent en compte ni la période d'indisponibilité ni la possibilité de départ brutal d'un salarié. De plus, la mise en place du modèle nécessite une intégration numérique, trop coûteuse pour des calculs actuariels effectués sur différentes classes de risque. Raupach (2003) [20] trouve une formule semi-fermée (nécessitant une double intégration numérique) dans le cas du modèle élaboré par Hull et White (barrière exponentielle combinée avec un taux de départ à intensité constante). Enfin, Cvitanic, Wiener et Zapatero (2004) [10] se basent sur le même modèle mais trouvent une formule fermée.

L'évaluation analytique proposée dans ce mémoire est l'adaptation de cette dernière approche aux contraintes de la norme IFRS 2.

2.1.2 Le modèle retenu

Avant de se lancer dans un choix définitif pour un modèle d'évaluation d'ESO, il est préférable d'étudier les avantages et inconvénients des articles cités ci-dessus. Comme nous avons pu le voir, deux voies principales ont été empruntées pour évaluer les ESO à leur juste valeur : les modèles analytiques et les modèles à arbres binomiaux. On peut également utiliser des simulations de Monte-Carlo.

- La première approche consiste à trouver une formule pour évaluer le prix des ESO. Elle nécessite des restrictions dans le choix des paramètres pour des raisons pratiques de calcul. Sont souvent mis à l'écart : l'effet dilutif, la volatilité stochastique du sous-jacent, les considérations liées à la théorie de l'agence (il est clair que certains dirigeants peuvent affecter avec leurs actions le prix des ESO), les conditions de performance boursière. Toutefois, la richesse du calcul stochastique a permis d'obtenir des résultats intéressants pour le prix des ESO, la date d'exercice attendue et la valeur attendue de l'action à l'exercice, cela en prenant en compte les caractéristiques principales des ESO (voir [10],[20],[8]). De plus, l'avantage évident est double : implémentation relativement simple et rapidité de calcul.
- La deuxième approche semble plus flexible dans le sens où elle permet de capter l'influence d'un plus grand nombre de facteurs. Cependant, certaines hypothèses plus complexes sur le comportement d'exercice des bénéficiaires paraissent difficiles à mettre en œuvre. Par exemple, un niveau de la barrière psychologique variable selon l'évolution plus ou moins récente du cours de l'action pose des difficultés à un modèle binomial puisque celui-ci ignore par quel chemin on a abouti à un nœud précis de l'arbre. De plus, comme expliqué dans [10], ces modèles convergent assez lentement et la convergence n'est pas uniforme.
- La troisième approche apparaît complémentaire car elle permet souvent de comparer et vérifier les résultats obtenus dans les deux cas précédents. De plus, les simulations de Monte-Carlo offrent une grande flexibilité face à la complexité du modèle choisi. Cependant, le talon d'Achille de cette méthode reste le temps d'attente exorbitant des résultats dès que l'on recherche un minimum de précision.

En définitive, nous n'avons pas choisi de nous restreindre à une approche particulière : c'est plutôt la complémentarité de ces dernières qui a été retenue. En effet, même si, il faut le reconnaître, le mémoire est centrée sur l'obtention d'une formule fermée, des simulations de Monte-Carlo ont été développées en parallèle dans un but de comparaison de résultats et de validation de formules.

2.2 Approche Analytique

Le modèle analytique que nous allons développer s'appuie essentiellement sur [10] et [20] pour l'exercice anticipé des options et sur [8], [11] et [17] pour les aspects mathématiques liés aux modèles à intensité d'une part et, plus généralement, au pricing à horizon aléatoire d'autre part.

2.2.1 Description du modèle

Le modèle s'efforce de calculer la juste valeur du prix d'une ESO attribuée pour un individu donné sous une évaluation risque neutre du point de vue de la firme. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'entreprise est moins pénalisée que l'employé par les problèmes de diversification du risque. En ayant une position courte sur les options attribuées, elle pourrait sous certaines conditions les racheter. De plus, les actionnaires qui autorise l'attribution des ESO ont la possibilité d'échanger librement leur actions et d'investir dans l'actif sans risque. Les employés ne peuvent pas en général se couvrir à cause du caractère non négociable de ces options. Ainsi, d'autant plus qu'ils ont en général une aversion pour le risque, on peut supposer que la firme est neutre au risque concernant son engagement.

Cours de l'action et formule de Black & Scholes

Comme dans le modèle de Black & Scholes [4], supposons que le cours de l'action suive un processus log-normal :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Sous la mesure risque neutre, la dynamique du cours de l'action devient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t \quad (2.1)$$

et peut se mettre sous forme :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \quad (2.2)$$

avec μ le drift, σ la volatilité, r le taux sans risque. W_t est un mouvement Brownien standard sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ que l'on munit de la filtration $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t \geq T_0}$ ¹. Dans l'univers risque neutre, le processus de prix des actions est une martingale. La valeur C_t en t d'une option de maturité T peut se voir comme l'espérance actualisée de ses flux futures.

$$C_t = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ \middle| \mathcal{G}_t \right]$$

On obtient pour $t = 0$ la formule de Black-Scholes qui dans le cas de dividende continu δ s'écrit :

$$\begin{array}{l} C = S_0 e^{-\delta T} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2) \quad \text{avec :} \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \\ d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T} \end{array} \quad (2.3)$$

L'exercice anticipé

Rien de tel qu'un petit dessin pour introduire les idées sous-jacentes à la modélisation du comportement d'exercice anticipé des optionnaires.

¹Nous nous sommes placés directement dans l'univers risque neutre et \mathbb{P} représente la probabilité dans cette univers

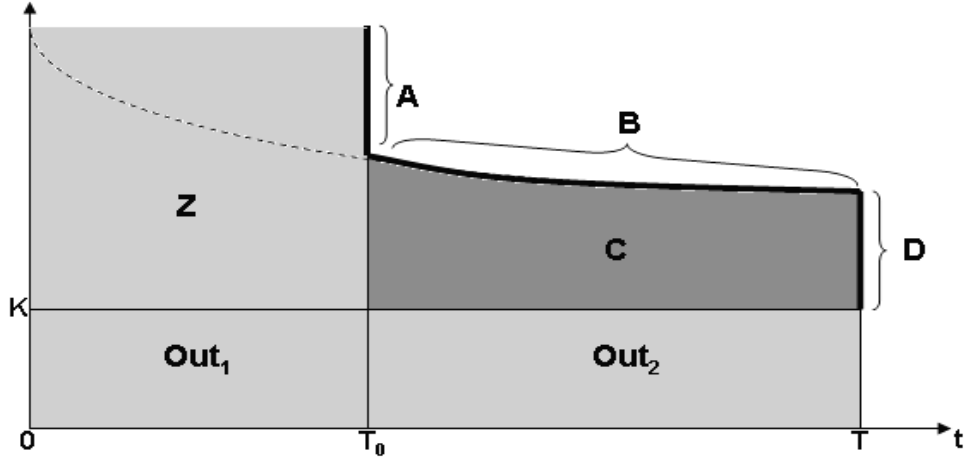


FIG. 2.1 : Les scénarios d'exercice des options

Fixons dorénavant T_a à 0. Notons $L_t = Le^{\alpha(t-T_0)}$ l'équation de la courbe **B**. On suppose que L et α sont deux réels ² tels que $L_t > K$ pour tout t dans $[T_0, T]$, ce qui impose $L > K$ et $\alpha > -\frac{1}{T-T_0} \ln\left(\frac{L}{K}\right)$. Les options sont attribuées en 0. Elles ne peuvent être exercées avant la date T_0 . Elles sont abandonnées dans la région **Z** si l'employé quitte la firme avant T_0 . Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, ce dernier point ne doit pas être pris en compte lors de l'évaluation mais pendant le processus de comptabilisation. Dans l'intervalle $[T_0, T]$, l'employé peut exercer ses options dans le cas des scénarios suivants :

Scénario A

En T_0 , si le cours de l'action se situe sur la demi-droite **A**, c'est à dire lorsque $S_{T_0} \in [L, +\infty[$. Dans ce cas, il s'agit d'une option européenne d'échéance T_0 dont l'exercice est conditionné à une valeur intrinsèque (en T_0) supérieure à $L - K$.

Scénario B

Entre T_0 et T , si le scénario A ne s'est pas produit³, les options sont exercées lorsque le cours de l'action dépasse pour la première fois la barrière exponentielle (courbe **B** sur la Fig. 3.1) d'équation L_t . Appelons τ_b le premier instant de franchissement de L_t après T_0 :

$$\tau_b = \inf\{t \geq T_0, S_t \geq L_t\} = \inf\{t \geq T_0, S_t e^{-\alpha(t-T_0)} \geq L\} \quad (2.4)$$

τ_b est donc un temps d'arrêt adapté à \mathbb{G} (car S_t est continu)⁴.

Scénario C

Entre T_0 et T , si les scénarios A et B ne se sont pas réalisés, au moment du premier instant τ_λ d'arrivée d'un processus d'intensité λ \mathbb{G} -prévisible : l'option pourra être exercée dans la région **C** en τ_λ si le pay-off est positif. Un lecteur non familier avec les processus à intensité et plus particulièrement, les processus de Cox, pourra se reporter à l'Annexe B où une définition formelle est fournie et plusieurs propriétés sont développées.

$$\tau_\lambda = \inf\{t \geq T_0, \int_{T_0}^t \lambda_s ds \geq E_1\}$$

avec E_1 une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 que l'on suppose indépendante de la filtration du brownien \mathbb{G} : τ_λ et τ_b sont donc deux variables aléatoires indépendantes.

²Dans le cas d'une barrière exponentielle décroissante, qui incite les employés à exercer à mesure du rapprochement de la maturité, on choisira α négatif.

³Dans le cas où $S_{T_0} < L$

⁴voir Karatzas et Shreve [16] Chap. 1.2

A ce stade, il convient de préciser les filtrations utilisées pour le formalisme mathématique. On a vu que toutes les variables d'états étaient adaptées à la filtration \mathbb{G} . Cependant, cette filtration est trop pauvre pour capturer le flux d'information relatif au temps d'arrêt τ_λ . On fixe ainsi un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ suffisamment large pour supporter les processus S, λ et le temps d'arrêt τ_λ . La filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ capture toute l'information relative à toutes les sources d'aléa au fur et à mesure que le temps s'écoule. Nous pouvons alors séparer les flux d'information de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_t &= \sigma\{S_u, \lambda_u, 0 \leq u \leq t\} \\ \mathcal{H}_t &= \sigma\{\mathbb{1}_{\{\tau_\lambda \leq s\}}, 0 \leq s \leq t\} \\ \mathcal{F}_t &= \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t\end{aligned}$$

avec \mathcal{G}_t qui représente l'information jusqu'au temps t relatif au processus (S, λ) et \mathcal{H}_t qui permet de dire si l'exercice a eu lieu avant t ou non (\mathbb{H} est la plus petite filtration pour laquelle τ_λ est un temps d'arrêt).

Notons également que la filtration \mathbb{G} ne fournit que l'information sur la tendance du taux d'exercice (l'évolution de λ_t) mais ne permet pas de décider à un instant t si l'exercice a eu lieu. Cette information est contenue dans la filtration \mathbb{F} par rapport à laquelle λ est un temps d'arrêt. En résumé, même en connaissant la perspective d'exercice d'un bénéficiaire, l'événement d'exercice est perçu comme une surprise totale, il est totalement imprévisible (alors que la tendance λ l'est). Ce formalisme conduit à une grande maniabilité des processus à intensité. En effet, la fonction de survie conditionnelle et la densité conditionnelle de τ_λ s'écrivent :

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > t\}} | \mathcal{G}_t] = e^{-\int_{T_0}^t \lambda_s ds} \mathbb{1}_{\{t \geq T_0\}} \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > T\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = \mathbb{1}_{\{\min(T, \tau_\lambda) \geq \max(t, T_0)\}} e^{-\int_{\max(t, T_0)}^T \lambda_s ds} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{\tau_\lambda \leq s\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = \mathbb{1}_{\{\min(s, \tau_\lambda) > \max(t, T_0)\}} \lambda_s e^{-\int_{\max(t, T_0)}^s \lambda_u du} \quad (2.7)$$

Scénario D

A la maturité T , si aucun des trois scénarios précédent ne s'est réalisé, l'option est exercée sur le segment **D** si $K \leq S_T \leq L e^{\alpha(T-T_0)}$.

Exemple

La figure ci-dessous illustre un exemple concret d'une trajectoire du cours de l'action. On constate qu'on se situe soit dans le scénario *B* ($S_{T_0} < L$ et S_t atteint L_t avant T juste avant la 6^{ème} année), soit dans le scénario *C* en cas d'interruption brutale du contrat de travail avant τ_b .

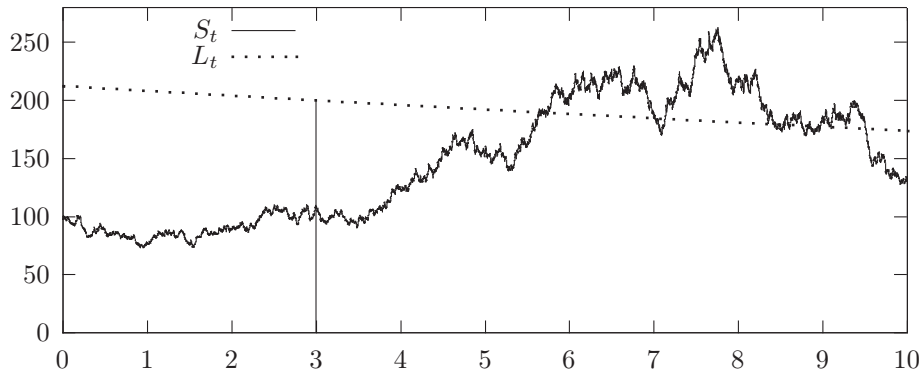


FIG. 2.2 : Une trajectoire de S dans le cas où $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 200$ et $\alpha = -0.02$

2.2.2 Calcul de la valeur de l'option

Dans cette partie, nous évaluons à la juste valeur une ESO en $t < T_0$ dans le cadre du modèle décrit précédemment et en utilisant la méthode de l'espérance actualisée des flux futures. Dans un premier temps, notre évaluation se situe dans un contexte très général : taux d'intérêt stochastique (r est un processus \mathbb{G} -adapté) et intensité stochastique (λ est un processus \mathbb{G} -adapté). En effet, dans l'optique d'une amélioration future du modèle, nous nous devons de rester le plus large possible. Nous rétrécirons ensuite notre champs d'action, pour des raisons pratiques de calcul, à un taux d'intérêt et une intensité constante. De plus, les quatres classes de scénario définies précédemment forment des ensembles disjoints d'événements :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Scénario A : } E_a = \{S_{T_0} \geq L\} \\ \text{Scénario B : } E_b = \{S_{T_0} < L\} \cap \{\tau_b < T\} \cap \{\tau_\lambda > \tau_b\} \\ \text{Scénario C : } E_c = \{S_{T_0} < L\} \cap \{\tau_\lambda < T\} \cap \{\tau_b > \tau_\lambda\} \\ \text{Scénario D : } E_d = \{S_{T_0} < L\} \cap \{\tau_b > T\} \cap \{\tau_\lambda > T\} \end{array} \right.$$

Si l'on note τ le temps d'arrêt correspondant à la réalisation d'un des scénarios précédents, on a :

$$C_t = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^\tau r_s ds} (S_\tau - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

qui se décompose en quatres termes :

$$C_t = C_t^a + C_t^b + C_t^c + C_t^d \quad (2.8)$$

$$= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.9)$$

$$+ \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{\tau_b} r_s ds} \left(L e^{\alpha(\tau_b - T_0)} - K \right) \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} \mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > \tau_b\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.10)$$

$$+ \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{\tau_\lambda} r_s ds} (S_{\tau_\lambda} - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_\lambda < T\}} \mathbb{1}_{\{\tau_b > \tau_\lambda\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.11)$$

$$+ \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.12)$$

Grâce à (2.6) et (2.7), en conditionnant sur $\mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t$, on obtient des expressions plus simples pour les C_t^x ($x \in \{a, b, c, d\}$). Nous donnons dans les sous-sections suivantes les expressions générales⁵ puis pratiques⁶ des C_t^x (r, λ constants et $t = 0$) :

Calcul de C_t^a

$$\begin{aligned} C_t^a &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\doteq \mathbb{E} \left[e^{-rT_0} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Calcul de C_t^b

$$\begin{aligned} C_t^b &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{\tau_b} r_s ds} \left(L e^{\alpha(\tau_b - T_0)} - K \right) \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > \tau_b\}} | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{\tau_b} r_s ds} e^{-\int_{T_0}^{\tau_b} \lambda_s ds} \left(L e^{\alpha(\tau_b - T_0)} - K \right) \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\doteq e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[e^{-(r+\lambda)\tau_b} \left(L e^{\alpha(\tau_b - T_0)} - K \right) \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

⁵Marqué par un "="

⁶Marqué par un "≐"

Calcul de C_t^c

$$\begin{aligned}
C_t^c &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{\tau_\lambda} r_s ds} (S_{\tau_\lambda} - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_\lambda < T\}} \mathbb{1}_{\{\tau_b > \tau_\lambda\}} \middle| \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \int_{T_0}^T \lambda_u e^{-\int_t^u r_s ds} e^{-\int_{T_0}^u \lambda_s ds} (S_u - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > u\}} du \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&\doteq \lambda e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \int_{T_0}^T e^{-(r+\lambda)u} (S_u - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > u\}} du \right]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Calcul de C_t^d

$$\begin{aligned}
C_t^d &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > T\}} \middle| \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} e^{-\int_{T_0}^T \lambda_s ds} (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&\doteq e^{-(r+\lambda)T} e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour des raisons de clarté, les calculs sont développés en Annexe A. A titre indicatif, il s'agit de conditionner dans un premier temps par rapport à \mathcal{G}_{T_0} et d'exploiter ensuite les résultats obtenus dans la littérature concernant la valorisation analytique des options exotiques (en particulier des options à barrière).

2.3 Approche par simulation de Monte-Carlo

Nous avons effectué pour chaque sous-option les simulations de Monte-Carlo permettant de vérifier la cohérence des formules trouvées précédemment. Il a paru important d'exposer ici les problématiques rencontrées et les solutions apportées lors de l'application des méthodes de Monte-Carlo au calcul des ESO, ne serait-ce que pour une extension future.

2.3.1 Préliminaire

Les méthodes de Monte-Carlo reposent sur la loi des grands nombres : si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur \mathbb{R} et g une fonction telle que $\mathbb{E}[g(X_i)]$ existe pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \longrightarrow \mathbb{E}[g(X)] \quad \text{presque sûrement} \quad (2.17)$$

Pour simuler les scénarios conduisant à la valeur des sous-options, il faut d'abord savoir simuler un mouvement Brownien géométrique. Pour cela, on a besoin de simuler une variable aléatoire de loi normale centrée réduite ϵ . La simulation d'un mouvement Brownien géométrique peut s'effectuer de deux manières :

- Soit directement, si l'on veut simuler la valeur du cours d'une action à un instant précis connaissant sa valeur initiale S_0 et toutes ses caractéristiques classiques :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} \epsilon \right)$$

- Soit pas à pas en simulant successivement toutes les valeurs du Brownien entre l'instant initial et la date de fin de simulation en discrétisant l'équation différentielle stochastique (2.1) vérifiée par le processus S :

$$\begin{cases} S_0 & = & s \\ S_{t+\Delta t} & = & S_t (1 + r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon) \end{cases}$$

2.3.2 Quelles méthodes de simulation choisir ?

A première vue, la méthode directe paraît attrayante car elle nécessite qu'une seule réalisation de ϵ pour générer la valeur d'une action à une date donnée. Mais, nous avons observé précédemment que la valeur de l'option dépendait de la totalité du chemin parcouru par le cours de l'action. La seconde méthode semble alors plus adaptée à notre problème. Cependant, la connaissance des densités de τ_b et τ_λ nous a permis de simuler ces deux dernières sources d'aléa intervenant dans le calcul de l'option : la méthode directe n'a pas dit son dernier mot ! A titre illustratif, voici les graphes de la densité de τ_b et τ_λ dans le cas où λ est supposé constant :

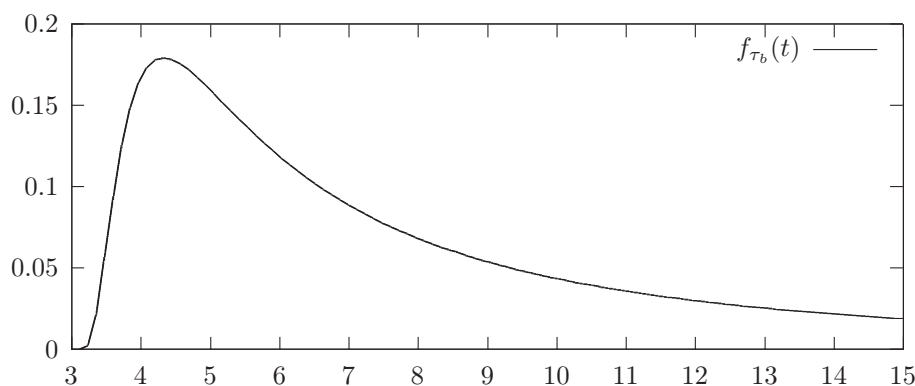


FIG. 2.3 : Densité de τ_b pour $T_0 = 3$, $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $L = 150$ et $\alpha = -0.02$

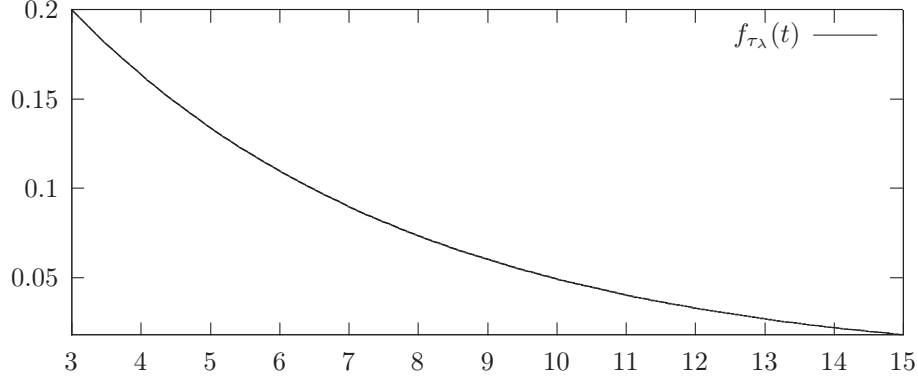


FIG. 2.4 : Densité de τ_λ pour $T_0 = 3$, $\lambda = 0.2$

On peut à partir de là, simuler une variable aléatoire de même loi que τ_b , en procédant par méthode de rejet par exemple. Pour simuler τ_λ , il suffit de générer une variable aléatoire E_1 de loi exponentielle de paramètre 1. On a donc : $\tau_\lambda = \inf\{t \geq T_0, \lambda(t - T_0) \geq E_1\} = T_0 + \frac{E_1}{\lambda}$.

Le piège consisterait à croire que toutes les sous-options seraient calculables via la méthode directe. Or cela n'est le cas que de C^a et C^b . Pour le comprendre, il est préférable de dérouler les algorithmes qui ont conduits à déterminer la valeur des sous-options.

2.3.3 Des simulations au cas par cas

Les simulations ont été réalisées à partir des formules suivantes :

$$\begin{cases} C^a &= e^{-rT_0} \mathbb{E} \left[(S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] \\ C^b &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau_b} (Le^{\alpha(\tau_b - T_0)} - K) \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} \mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > \tau_b\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \\ C^c &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau_\lambda} (S_{\tau_\lambda} - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_\lambda < T\}} \mathbb{1}_{\{\tau_b > \tau_\lambda\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \\ C^d &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \mathbb{1}_{\{\tau_\lambda > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \end{cases}$$

On remarque que C^a nécessite seulement la simulation de S_{T_0} , ce qui ne pose aucun problème. De plus, pour calculer C^b , il faut d'abord simuler S_{T_0} puis τ_b et τ_λ et, en fonction du résultat des tests effectués, calculer le "pay-off" futur. Concrètement, en employant un méta-langage l'algorithme de Monte-Carlo conduisant à C^b peut se mettre sous la forme suivante :

```

Somme = 0
Boucle de 1 à NbSimul
  Simuler "directement"  $S_{T_0}$ 
  Si  $S_{T_0} < L$ 
    Simuler "directement"  $\tau_\lambda$  et  $\tau_b$ 7
    Si  $\tau_b < \tau_\lambda$  et  $\tau_b < T$ 
      Res =  $e^{-r\tau_b} (Le^{\alpha(\tau_b - T_0)} - K)$ 
    Sinon Res = 0
    Fin Si
  Sinon Res = 0
  Fin Si
  Somme = Somme + Res
Fin Boucle
 $C^b = \text{Somme} / \text{NbSimul}$ 

```

⁷à partir de sa densité qui dépend de S_{T_0} : voir (A.4)

La méthode directe est donc applicable dans ces deux premiers cas et peut fournir des résultats plus rapidement si l'on utilise un algorithme suffisamment efficace pour la simulation de τ_b .

En ce qui concerne C^c et C^d , nous sommes contraints de procéder différemment dans la mesure où (respectivement) S_{τ_λ} et S_T doivent être simulées. Dans ce cas, la simulation de τ_b et donc la connaissance S_{τ_b} est corrélée avec les réalisations futures ou passées de S_{τ_λ} et S_T . Voici toujours dans le même langage l'algorithme de Monte-Carlo pour le calcul de C^c , celui de C^d étant fortement semblable.

```

Somme = 0
Boucle de 1 à NbSimul
  Simuler "directement"  $S_{T_0}$ 
  Si  $S_{T_0} < L$ 
    Simuler "directement"  $\tau_\lambda$ 
    Si  $\tau_\lambda > T$ 
       $t = T_0$ 
       $S = S_{T_0}$ 
      Tant que  $t < \tau_\lambda$  Faire
        Simuler  $\epsilon$  de loi normale centrée réduite
        Simuler  $S = S(1 + r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon)$ 
        Si  $S \geq Le^{\alpha(t-T_0)}$ 
          8 $Res = 0$ 
          Arrêt Boucle
        Fin Si
       $t = t + \Delta t$ 
    Fin Boucle
    Si  $t \geq \tau_\lambda$  9 $Res = e^{-r\tau_\lambda} \max((S - K), 0)$ 
    Fin Si
  Sinon  $Res = 0$ 
  Fin Si
Sinon  $Res = 0$ 
Fin Si
Somme = Somme + Res
Fin Boucle
 $C^b = Somme/NbSimul$ 

```

Comme on peut le constater, les méthodes proposées ici sont très facilement exploitables¹⁰. De plus, si l'on souhaite étendre ou modifier notre modèle, il suffit de rectifier légèrement les codes ci-dessus alors que, dans le même sens, une approche analytique se complexifierait très rapidement et deviendrait inutilisable. Cependant, l'implémentation de ces méthodes rencontre plusieurs limitations sur le plan de la précision et du temps de calcul.

2.3.4 Vitesse de convergence

En effet, même si, comme nous l'avons mentionné, les deux premières sous-options se calculent assez rapidement pour une certaine précision¹¹, les temps de calculs explosent très vite pour les deux autres. De façon général, dès que l'on recherche une plus grande précision ou bien lorsque l'évaluation des ESO s'effectue suivant les caractéristiques de chaque employé, sur un échantillon de taille élevé¹², la durée d'attente pour l'obtention des résultats devient inacceptable : voir (2.4). Une question naturelle est alors la vitesse de convergence des méthodes de Monte-Carlo.

⁸réalisation de τ_b avant τ_λ

⁹ S vaut alors S_{τ_λ}

¹⁰un langage de programmation et un générateur aléatoire suffisent

¹¹pour la plupart des applications une précision de 10^{-2} est acceptable

¹²une centaine de personne par exemple

En reprenant les notations introduites pour (2.17) et le Théorème central limite assure que si $\tilde{\sigma}^2 = \text{var}[g(X)]$:

$$\frac{\sum_{i=1}^n g(X_i) - \mathbb{E}[g(X)]}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} \longrightarrow Y \quad \text{en loi} \quad (2.18)$$

où Y est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Par conséquent, l'erreur d'estimation $\epsilon_n = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - \mathbb{E}[g(X)] \right|$ satisfait :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon_n}{\tilde{\sigma}} \leq 1.96\right) \simeq \mathbb{P}(|Y| \leq 1.96) = 0.95$$

Un intervalle de confiance pour $\mathbb{E}[g(X)]$ au niveau 95% est donc :

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - \frac{1.96\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) + \frac{1.96\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.19)$$

La vitesse de convergence est donc de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Il faut noter qu'elle est également proportionnelle à $\tilde{\sigma}$ et ce détail a bien souvent une influence considérable sur la qualité de l'approximation. A ce propos, la plupart des méthodes dites d'accélération de la convergence sont basées sur la minimisation de $\tilde{\sigma}$ et la rapidité du générateur aléatoire.

Ainsi, notre implémentation a toujours été accompagnée d'une estimation de l'erreur, quantité indispensable pour pouvoir apporter une signification aux résultats trouvés.

2.4 Analyse pour une application actuarielle, Résultats et Commentaires

Cette partie du mémoire se rapproche de la norme IFRS 2 et met en exergue les aspects pratiques de son application actuarielle. De plus, elle s'intéresse à l'estimation des paramètres liés au modèle et élabore une étude de sensibilité de ces derniers sur les résultats.

2.4.1 Regroupement des individus par classe de risque

Les bénéficiaires n'adoptent pas tous les mêmes comportements en ce qui concerne l'exercice de leurs options. Comme le préconise la norme, il est préférable de regrouper les individus par classe de risque et d'estimer la valeur des options pour chacune d'entre elles. En effet, prenons pour exemple les trois personnages suivants qui nous suivront au travers de cette étude :

- Pierre a 27 ans, il est cadre informaticien dans une grande société de service. Il travaille pour cette entreprise depuis un an et il s'agit de son quatrième emploi. S'il se voyait attribuer des stock-options, il miserait sur la prudence et exercerait ses options le plus tôt possible.
- Paul a 40 ans. Chef de projet dans le secteur automobile, il travaille pour la même entreprise depuis 10 ans. Il connaît bien son entreprise et ses activités boursières. A ce propos, il possède plusieurs de ses actions. Il nous a confié qu'il exercerait ses options si le cours de l'action atteignait une fois et demi le prix d'exercice.
- Jacques a 55 ans, il dirige le service commerciale d'une société de transport aérien. Proche de la retraite, il compte 20 ans d'ancienneté dans cette entreprise. Le conseil d'administration lui a gracieusement attribué une grande quantité d'options. Il a une excellente connaissance de l'activité de marché de son employeur. De plus, sa position lui permet de capter certaines informations qu'il pourrait discrètement¹³ exploiter en sa faveur pour l'exercice de ses options.

2.4.2 Estimation des paramètres pour l'exercice anticipé

Comme nous allons le voir, l'évaluation des ESO pour Pierre, Paul ou Jacques apporte des résultats bien différents. En effet, notre modèle soutient que l'exercice provient de deux phénomènes supposés indépendants :

- le premier concerne l'appréhension du risque par le bénéficiaire : paramètres L et α
- le second la rupture de son contrat de travail par démission, par licenciement ou par décès : paramètre λ . On pourrait également inclure le départ en retraite mais il ne fait pas l'objet, en pratique, d'une perte du droit d'exercice. Il convient donc d'exclure son influence sur l'estimation de λ .

Ces paramètres conditionnent fortement le résultat de l'évaluation et peuvent être naturellement "rapprochés" des caractéristiques de nos trois personnages. Pierre est jeune mais reste quand même opportuniste : la probabilité qu'il décède pendant la période d'exercice est très faible mais son taux de turnover est relativement élevé. Il semble de plus avoir une aversion pour le risque. Paul, bien que dans la force de l'âge, possède une probabilité de décéder un peu plus élevée que Pierre et son taux de turnover reste faible. Il paraît déterminer quant à ses objectifs de gain. Enfin, Jacques est le personnage qui possède la probabilité de survie la plus petite, son ancienneté laisse présager un taux de turnover faible et sa connaissance des marchés financiers lui confère une confiance certaine dans l'avenir du titre de sa société. A ce stade, il convient de se poser plusieurs questions :

1. Quelles caractéristiques sont suffisamment objectives et pertinentes pour être conservées ?
2. Comment procéder pour intégrer ces dernières dans l'estimation des paramètres ? Par exemple, sur quels critères évaluer le comportement d'un individu face au risque ?

Pour apporter des réponses cohérentes à ces interrogations, il faut, tout d'abord, savoir que les informations personnelles fournies sur les bénéficiaires se limitent en général aux éléments suivants : le nom de la société, la date de naissance, l'ancienneté, le statut, la rémunération, la situation familiale, le nombre d'enfants, les

¹³en se faufilant au travers des mailles du délit d'initié

différents avantages sociaux et en particulier le nombre de stock-options attribuées.

Le modèle analytique développé ici présente l'avantage de ne faire intervenir que trois paramètres¹⁴ "subjectifs", L , α et λ qui, à première vue, paraissent difficile à estimer que ce soit au niveau de la firme ou au niveau individuel. Cependant, Carpenter [7] a effectué une étude statistique sur l'exercice des stock-options à partir de 40 sociétés américaines d'où l'on a extrait dans le tableau ci-dessous les principaux résultats¹⁵ :

Caractéristiques	Valeur moyenne	Écart-type
1. Durée d'attente moyenne à l'exercice (années)	5.83	2.25
2. Ratio de performance moyen à l'exercice	2.75	1.42
3. Taux d'annulation annuel moyen	5.6%	5.1%
4. Volatilité moyenne	31%	10%
5. Taux de dividende moyen	3%	2 %

Ce tableau doit être exploité avec beaucoup de précaution. En effet, il ne donne que des valeurs moyennes qui caractérisent un panel d'entreprises hétérogènes¹⁶. De plus, l'analyse se base exclusivement sur des sociétés américaines et les données exploitées datent d'une petite dizaine d'années. Cependant, peu d'études se sont intéressées au comportement d'exercice des optionnaires et les chiffres donnés ci-dessus permettent toutefois de fixer un ordre de grandeur quant aux paramètres du modèle liés à l'exercice anticipé.

Très subjectif, L et α pourront être choisis en fonction du ratio de performance moyen à l'exercice puis adaptés à la rémunération du salarié : un salarié bien rémunéré ayant, en général, moins besoin de liquidité. Paul et Jacques auront donc un paramètre L proportionnellement plus élevé que Pierre. En ce qui concerne λ , le taux d'annulation annuel moyen, très volatile, pourra être ajusté par rapport au taux de turnover de la catégorie socio-professionnelle du salarié et à sa probabilité de décès¹⁷. Ainsi, λ sera plus faible pour Jacques que pour Pierre et Paul.

¹⁴Les autres paramètres à estimer comme la volatilité et le taux de dividende, ont été traités au paragraphe 1.2.2

¹⁵ $T_0 = 3$ ans et $T = 10$ ans

¹⁶En plus de cela les écarts-types sont assez important, ce qui déprécie la fiabilité de l'estimateur moyenne

¹⁷Si l'on voulait bien faire, il faudrait également prendre en compte les caractéristiques des populations concernées par l'attribution des stock-options, à savoir les cadres supérieurs et dirigeants, notamment pour les probabilités de survie..

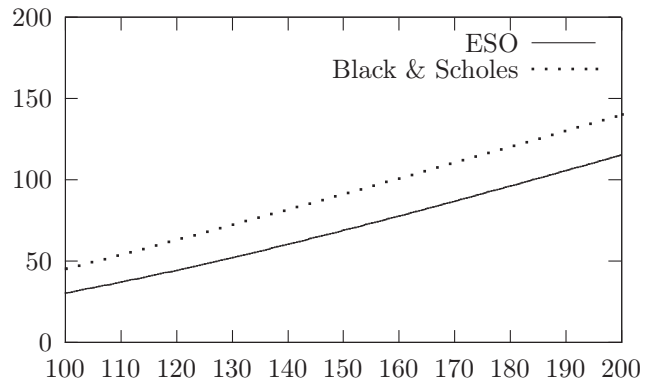
2.4.3 Résultats et Commentaires

Dans ce paragraphe, nous avons réalisé une étude de sensibilité des paramètres qui interviennent pour l'évaluation des ESO. Dans chaque cas, une analyse comparative avec le modèle de Black & Scholes a été effectuée.

Les paramètres standards

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction de S_0 lorsque $T_0 = 3$, $T = 10$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $L = 150$ et $\alpha = -0.02$, $\lambda = 0.04$ ¹⁸ :

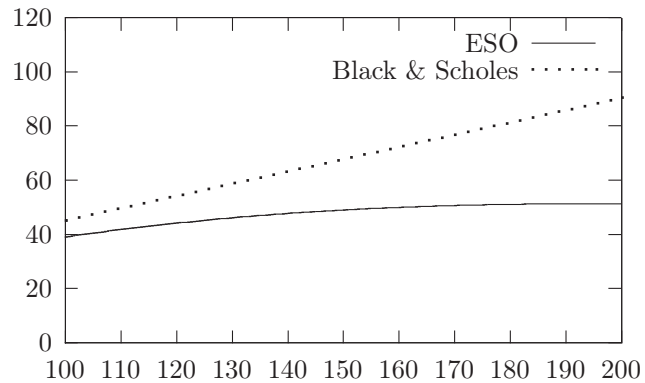
S_0	ESO	Black & Scholes
100	30.2591	45.193
110	36.9781	54.0074
120	44.2449	63.0836
130	52.0073	72.3597
140	60.2036	81.7892
150	68.7692	91.3371
160	77.6414	100.977
170	86.7633	110.688
180	96.0849	120.455
190	105.564	130.267
200	115.167	140.114



Comme prévu, on remarque que Black & Scholes surestime la valeur de l'option et lorsque le prix d'exercice reste fixé, l'écart entre les deux modèles n'augmente que très légèrement. Les deux valeurs de l'option augmentent lorsque S_0 augmente, ce qui est cohérent : la plus-value potentielle augmente avec S_0 .

Même comparaison, mêmes données sauf que l'on fait également évoluer K avec S_0 en prenant $L = 250$ ¹⁹ :

$S_0 = K$	ESO	Black & Scholes
100	39.0287	45.193
110	41.7452	49.7123
120	44.0987	54.2316
130	46.0841	58.7509
140	47.708	63.2702
150	48.9878	67.7895
160	49.9502	72.3088
170	50.629	76.8281
180	51.0631	81.3474
190	51.2947	85.8666
200	51.3669	90.3859



Ce cas illustre la situation réelle de l'attribution des stock-options "at-the-money". On constate que l'écart augmente avec S_0 et K . En effet, lorsque le prix d'exercice augmente de la même façon que S_0 , la probabilité d'exercice par franchissement de la barrière augmente (avec S_0) alors que la plus-value potentielle de l'option

¹⁸Valeurs recueillies dans [10]

¹⁹Pour des raisons de calculs, (Voir paragraphe 2.2.1), Il faut prendre $L_t > K$ pour tout K et tout t , on a donc choisi ici $L = 250$

diminue (lorsque K augmente). Ainsi, on constate ici à la fois une perte de plus-value et une perte de time-value.

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction de la volatilité :

On voit que l'influence de la volatilité sur la valeur des ESO est aussi importante que pour le modèle de Black & Scholes, l'écart entre les deux valorisations restant à peu près constant. Il faudra donc insister sur la précision lors de l'estimation de σ .

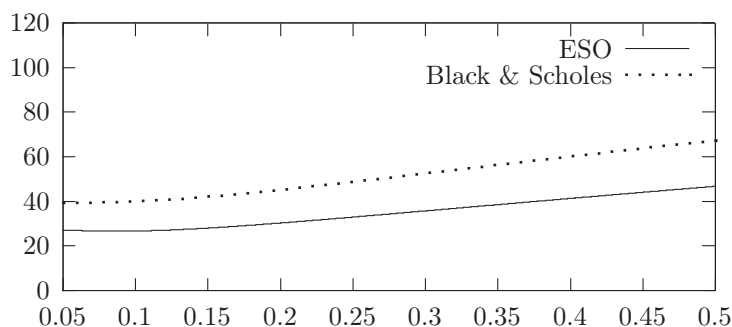


FIG. 2.5 : Comparaison des résultats avec Black-Scholes en fonction de σ avec $S_0 = 100$, $K = 100$, $T_0 = 3$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\alpha = 0$, $L = 150$ et $\lambda = 0.04$

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction du taux d'intérêt :

On remarque que, par rapport au modèle de Black & Scholes, l'évolution du taux d'intérêt a une influence assez faible sur la valeur des ESO. En outre, plus le taux d'intérêt augmente, plus l'écart s'élargit. Intuitivement, l'exercice anticipé et donc une maturité attendue plus faible diminue l'influence du taux d'intérêt.

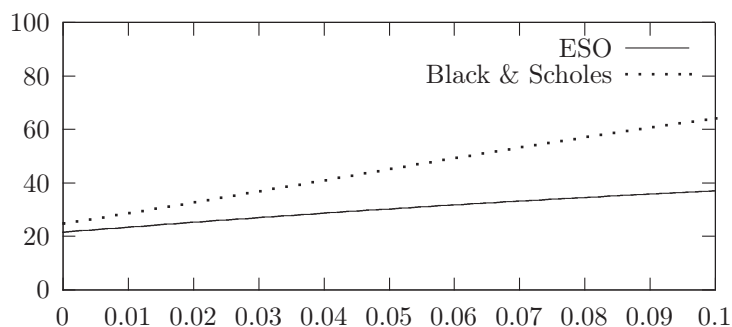


FIG. 2.6 : Comparaison des résultats avec Black-Scholes en fonction de r avec $S_0 = 100$, $K = 100$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $\sigma = 0.2$, $L = 150$, $\alpha = -0.02$ et $\lambda = 0.04$

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction de la maturité :

Même remarque que précédemment, l'influence de la maturité sur le prix des ESO reste faible en comparaison avec le prix de Black & Scholes. On constate, de plus que, lorsque la maturité se rapproche de la date de début d'exercice, le prix obtenu par les deux évaluations se rapproche. En effet, lorsque $T = T_0$, l'exercice anticipé est alors impossible, les ESO se comportent comme des options classiques.

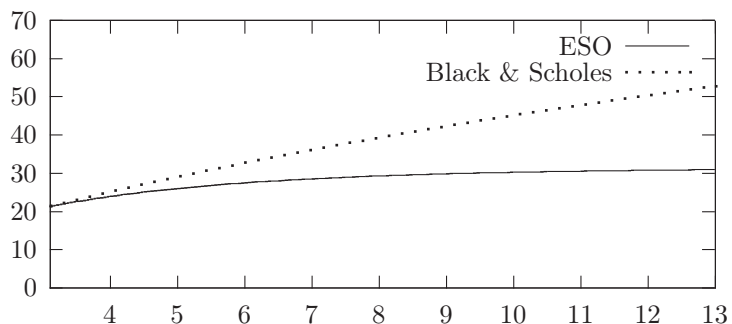


FIG. 2.7 : Comparaison des résultats avec Black-Scholes en fonction de T avec $S_0 = 100$, $K = 100$, $T_0 = 3$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $L = 150$, $\alpha = -0.02$ et $\lambda = 0.04$

Les paramètres relatifs aux ESO et à l'exercice anticipé

Evolution de la date de début d'exercice possible :

En rapport avec la norme IFRS 2, l'évaluation des ESO ne prend pas en compte les départs précédents la date de début d'exercice. L'augmentation de cette dernière a donc un effet positif puisqu'elle préserve la valeur temps de l'option. Pour les mêmes raisons que précédemment, lorsque $T_0 = T$, le prix est le même que pour le modèle de Black & Scholes.

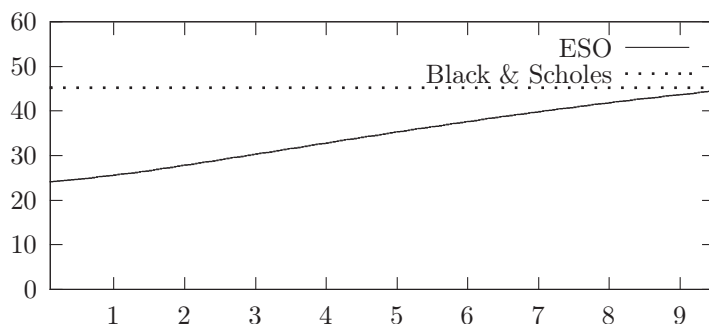


FIG. 2.8 : Comparaison des résultats avec Black-Scholes en fonction de T_0 avec $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 10$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $L = 150$, $\alpha = -0.02$ et $\lambda = 0.04$

Evolution de la hauteur de la barrière :

Plus la barrière augmente, plus il est improbable que le cours de l'action la franchisse. On constate que le prix des ESO se stabilise pour des grandes valeurs de L , laissant de plus en plus de place aux options qui atteignent la maturité.

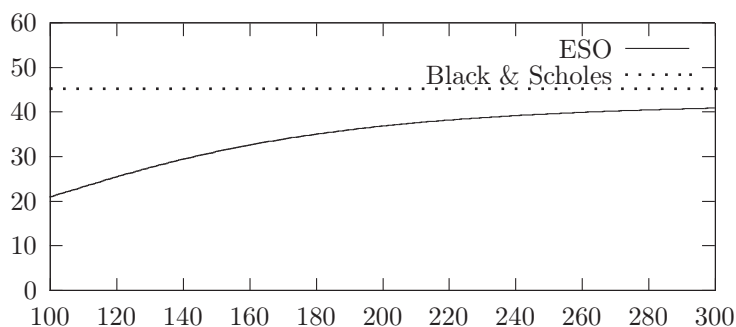


FIG. 2.9 : Comparaison des résultats avec Black-Scholes en fonction de L avec $S_0 = 100$, $K = 100$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\alpha = 0$ et $\lambda = 0.04$

Evolution de l'inclinaison de la barrière²⁰ :

Ici, on obtient le même effet que pour la hauteur de la barrière, les deux paramètres étant totalement liés. Cependant, il semblerait que l'influence de α soit plus faible sur la valorisation. Lorsque α est négatif, on a vu que les bénéficiaires se pressaient d'exercer leurs options à l'approche de la maturité en perdant ainsi la valeur temps associée.

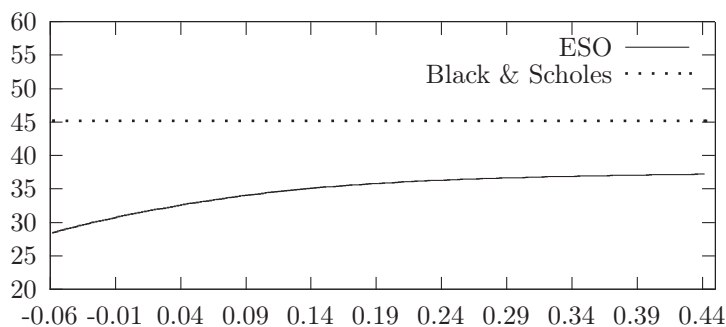


FIG. 2.10 : Comparaison des résultats avec Black-Scholes en fonction de α avec $S_0 = 100$, $K = 100$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $L = 150$ et $\lambda = 0.04$

²⁰En ce qui concerne le choix du paramètre α , même remarque que la note 19

Evolution du taux de départ par démission, licenciement ou décès :

Là aussi, l'impact du taux de départ semble assez faible. Cependant il agit négativement sur le prix des ESO : plus le taux de départ est élevé, plus la probabilité d'exercice anticipé augmente et plus la valeur temps diminue.

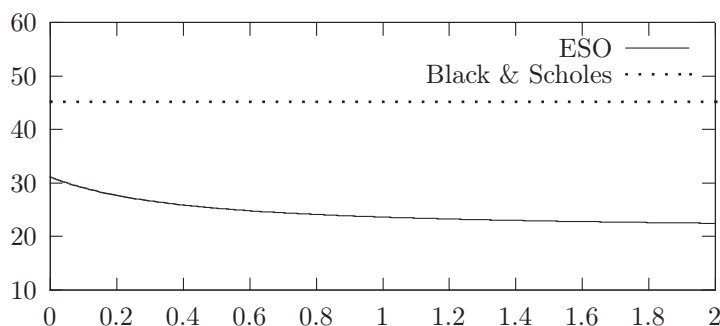


FIG. 2.11 : *Comparaison des résultats avec Black-Scholes en fonction de λ avec $S_0 = 100$, $K = 100$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $L = 150$, $\alpha = -0.02$*

En conclusion, on peut remarquer que l'évolution des paramètres standards comme le taux d'intérêt, le prix d'exercice, la volatilité et la maturité impactent le prix des ESO dans le même sens que le modèle de Black & Scholes. Mais leur influence est affaiblie par le phénomène d'exercice anticipé. Seule la volatilité conserve un impact fort sur l'évaluation des ESO. Les paramètres propres à notre modèle tendent à déprécier la valeur de l'option lorsqu'ils favorisent l'exercice anticipé et font diminuer la valeur temps de l'option.

Posséder une formule fermée pour l'évaluation des ESO nous a permis avant tout de se rapprocher des problématiques rencontrées par l'actuaire en élargissant notre modèle à différentes classes de risque, les paramètres du modèle pouvant être adaptés aux caractéristiques de chaque classe de risque. De plus, outre son temps de calcul quasi immédiat, notre expression analytique peut être différenciée par rapport à tous ses arguments. Il en résulte un meilleur contrôle en cas de couverture des options et une meilleure gestion de la sensibilité des paramètres.

2.5 Limites du modèle et améliorations possibles

La réalisation d'un modèle, le plus sophistiqué qu'il soit, n'est jamais exempt de limitations et de points faibles. Le tout est de pouvoir apporter des arguments pour une amélioration potentielle. Il s'agit soit de pistes non encore exploitées, faute de temps, soit d'éléments permettant l'intégration directe de nouveaux facteurs.

Plusieurs éléments n'ont pas été pris en considération par notre modèle. En voici les principaux :

- Les conditions de marché imposées par le conseil d'administration pour l'attribution des options aux employés ont été écartées de l'évaluation analytique. Ce qui n'est pas trop pénalisant en pratique puisque, nous l'avons vu, elles ne sont employées que dans un nombre restreint de pays. Pour palier à ce manque, il faudrait intégrer un nouveau temps d'arrêt τ_M correspondant au premier dépassement du Brownien au-delà d'une barrière horizontale M : ($\tau_M = \inf\{t \geq 0, S_t \geq M\}$). Alors, dans ce cas, les sous-options caractéristiques du comportement d'exercice à des dates particulières, auraient une valeur non nulle seulement si τ_M survient avant ces dates. Concrètement, le calcul analytique s'établirait de la même façon en rajoutant l'indicatrice :

- $\mathbb{1}_{\{T_0 \geq \tau_M\}}$ pour le calcul de C^a ,
- $\mathbb{1}_{\{\tau_b \geq \tau_M\}}$ pour C^b ,
- $\mathbb{1}_{\{\tau_\lambda \geq \tau_M\}}$ pour C^c et
- $\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_M\}}$ pour C^d .

De la même façon que pour τ_b , on connaît la loi de τ_M . Cependant, en gardant à l'esprit que ces deux dernières variables aléatoires sont étroitement corrélées, il nous faut alors établir la loi conditionnelle de τ_b sachant τ_M . Mais même en disposant de cette dernière, les calculs deviendraient bien trop fastidieux. Pour introduire τ_M , on pourrait cependant alléger notre modèle en supprimant le temps d'arrêt τ_b et en développant un peu comme [8] la modélisation par processus à intensité.

- Si l'on connaît le taux de dividende annuel moyen δ , son intégration dans notre modèle est immédiat puisqu'il suffit, comme pour le modèle de Black & Scholes, de remplacer le taux d'intérêt r par $r - \delta$.
- Nous avons implicitement considéré que l'effet dilutif dû aux émissions d'actions à un prix inférieur à celui du marché a été intégré par ce dernier à l'annonce du plan de stock-option. Cependant, il se pourrait que cela ne soit pas toujours le cas, et que la dilution intervienne plus tard ou de façon progressive. Dans ce cas, c'est tout le modèle d'évolution de l'action qui est à revoir. Une solution serait peut-être de l'inclure dans le taux de dividende.
- Le modèle ne prend pas en compte l'évolution de la volatilité. Cependant, l'introduction d'un processus stochastique pour la volatilité complexifierait grandement le calcul analytique. On pourrait néanmoins avoir recours aux simulations de Monte-Carlo.
- On pourrait également intégrer l'évolution possible de la barrière psychologique en fonction de l'évolution récente du cours de l'action. Là encore il semblerait que seules des simulations de Monte-Carlo pourraient nous porter secours.
- Le modèle dans sa forme initiale intègre le caractère stochastique du taux d'intérêt et de l'intensité d'exercice par départ anticipé du salarié²¹. Cependant, pour explorer cette voie, il est nécessaire d'introduire de nouveaux paramètres ne serait-ce que pour décrire les lois des variables aléatoires régissant les processus, ce qui complique considérablement le calcul analytique et l'estimation des paramètres. Néanmoins, comme nous l'avons vu, les stock-options ont une durée de vie parfois supérieure à 10 ans. Il serait alors légitime de ne pas figer ces deux grandeurs.
- En ce qui concerne l'estimation et le choix des paramètres, il est clair que certaines solutions n'ont pas été envisagées. En effet, un calcul similaire à celui des sous-options permet de trouver la durée de vie moyenne d'une option, la moyenne du cours de l'action à l'exercice et les probabilités inhérentes aux réalisations des différents scénarios d'exercice. L'estimation empirique de ces valeurs paraissant aisément

²¹Voir 2.2.1

réalisable, il serait alors possible d'exploiter ces dernières pour calibrer les paramètres L , α et λ . Dans le cas où l'utilisateur ne souhaiterait employer qu'une partie de ces paramètres pour sa valorisation, leur influence peut être annihilée en choisissant, par exemple, une grande valeur pour L (ex : 100000), $\alpha = 0$ et $\lambda = 0$. On peut remarquer également que, bien souvent, très peu d'options atteignent la maturité. On pourrait donc simplifier les calculs en faisant tendre cette dernière vers l'infini.

Chapitre 3

Comptabilisation des Stock-Options

Ce court chapitre effectue la synthèse de la comptabilisation des instruments de capitaux propres et en particulier des stock-options sous la norme IFRS 2. Nous avons proposé précédemment une méthode pour la valorisation des stock-options à leur juste valeur. Cependant, comme mentionné à plusieurs reprises, les options qui sont abandonnées pendant la période d'acquisition¹ sont écartées de notre évaluation, comme suggéré par la norme. Ainsi, nous verrons comment les principes de la comptabilisation sous IFRS 2 permettent de compléter la valorisation des options à leur juste valeur.

3.1 Le Principe

Comme il a été précisé à plusieurs reprises, la juste valeur des stock-options est comptabilisée en charges sur la période d'acquisition des droits par contrepartie directe d'une augmentation des capitaux propres. Il convient de rappeler que les écritures comptabilisées dès la date d'attribution et, a fortiori, après l'acquisition définitive des droits par leurs bénéficiaires le sont de manière définitive et irréversible, alors même qu'in fine les options sont susceptibles de ne jamais être exercées. Dans cette mesure, les écritures liées à la comptabilisation des stock-options reposent sur une logique assez proche de celle qui prévaut en matière de provision, ces dernières devant être annulées par voie de reprise lorsqu'elles sont abandonnées. Ainsi, même lorsqu'il est très peu probable que les stock-options soient effectivement exercées un jour, il n'est pas permis de reprendre en produits dans le compte de résultat les charges qui, depuis la date d'attribution des stock-options, sont venues minorer les résultats de l'entreprise ayant accordé ce type d'avantages à certain de ses membres.

La juste valeur des stock-options doit être calculée au moment de leur attribution initiale en intégrant, dès l'origine, les possibilités d'annulation : démission, départ, licenciement, probabilité que les objectifs de performance non boursière ne soient pas atteints. Toutefois, même si la juste valeur des stock-options, prise individuellement, et telle que calculée à l'origine n'est jamais remise en cause, le nombre potentiel d'options exerçables doit être ajusté en permanence en fonction des circonstances. Pour cela, si l'on suppose avoir réalisé une évaluation par classe de risque, il faudra, pour chacune d'entre elles, tout au long de la période d'acquisition réviser les estimations d'annulation effectuées à l'origine. L'impact de ces changements est enregistré dans le compte de résultat de l'exercice au cours duquel ces changements sont constatés.²

¹Rappel : période d'indisponibilité

²Conformément aux principes généraux définis par la norme IAS 8 en matière de changements d'estimations

Rien de plus compréhensible qu'un schéma récapitulatif suivi d'un petit exemple concret :

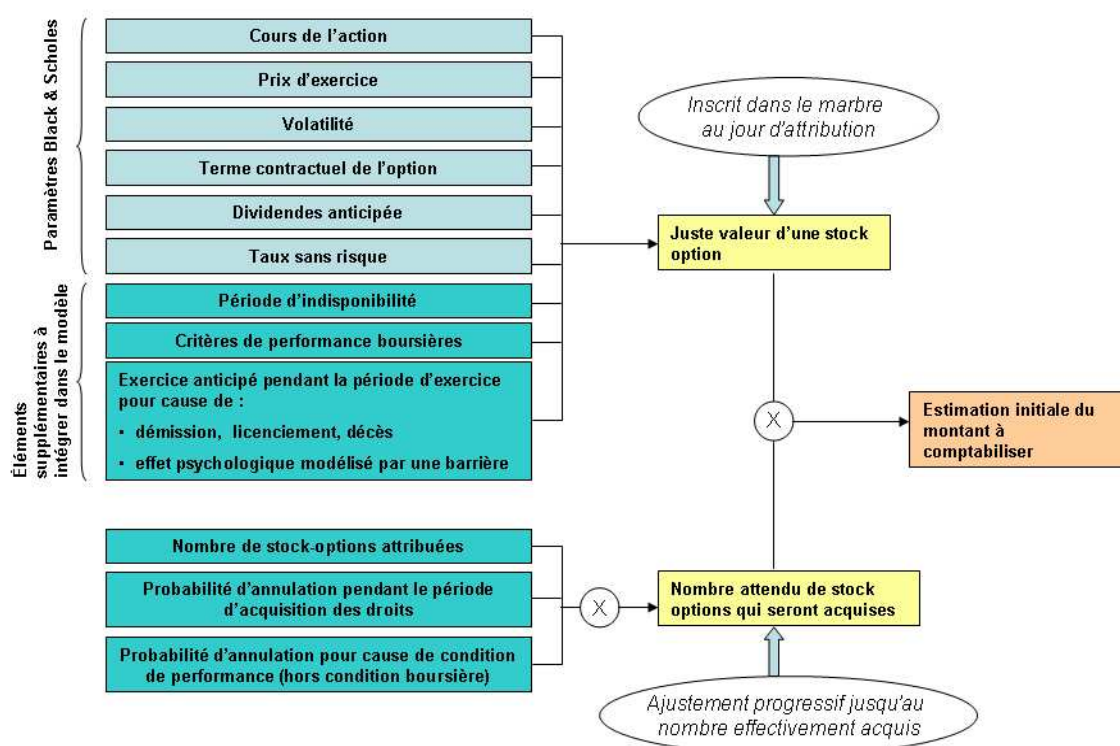


FIG. 3.1 : Principe de la comptabilisation sous IFRS 2

3.2 Un exemple illustratif

Afin d'illustrer les modalités d'intégration des changements d'estimations, nous développons ci-après un exemple qui prend en compte la révision des hypothèses d'origine concernant le nombre d'abandons d'options durant la période d'acquisition.

On suppose que le conseil d'administration d'une entreprise attribue 50 stock-options à chacun de ses 500 salariés le 1^{er} Janvier de l'année N . Ces options présentent les caractéristiques suivantes :

- Parité : une stock-option donne droit à une action.
- Prix d'exercice 100 € par stock-option.
- Durée de vie des stock-options : 10 ans.
- Cours de l'action sous-jacente au moment de l'attribution : 100 €.
- Période d'acquisition des droits : 3 ans.

Supposons de plus, pour simplifier qu'il n'y ait qu'une seule classe de risque³. En reprenant les paramètres utilisés dans le premier exemple du paragraphe 2.4.3, la valeur trouvée par notre méthode d'évaluation est de 30.25 €. On suppose que les prévisions pour le taux de départ annuel pendant les 3 années de la période d'acquisition connaissent l'évolution suivante :

- Année N : 1%
- Année $N + 1$: 2%
- Année $N + 2$: 1.5%

³Dans le cas de plusieurs classe de risque, il suffit de reprendre pour chaque groupe la démarche développée dans cet exemple

Cela correspond à une prévision de 3% à l'année N sur l'ensemble de la période, d'une prévision de 6% à l'année $N + 1$ et d'une prévision de 4.5% à l'année $N + 2$:

- Année N : 15 salariés sont donc a priori concernés par la perte de leurs stock-options en quittant leur entreprise de façon anticipée. Ainsi, la juste valeur des options attribuées en tenant compte des départ estimés des bénéficiaires est de : $50 \times (500 - 15) \times 30.25 = 733\,562$ €. Il faudra donc afficher l'année courante au compte de résultat⁴ (CR) et au bilan⁵ (B) les quantités suivantes :
 - CR : $733\,562/3 = 244\,520$ €
 - B : 244 521 €
- Année $N + 1$: La révision du taux de départ conduit à supposer que 30 salariés quittent la firme. Ce qui correspond à 710 875 € pour la juste valeur des options sur toute la période, soit environ 236 958 € pour une année. Il convient alors de réajuster la charge pour l'année $N + 1$ comme suit :
 - CR : $236\,958 - (244\,521 - 236\,958) = 229\,396$ €
 - B : 229 396 €
- Année $N + 2$: La révision du taux de départ conduit à supposer que 22 salariés quittent la firme. Ce qui correspond à 722 218 € pour la juste valeur des options sur toute la période, soit environ 240 739 € pour une année. Il convient alors de réajuster la charge pour l'année $N + 2$ comme suit :
 - CR : $240\,739 - (229\,396 - 240\,739) = 252\,083$ €
 - B : 252 083 €
- Année $N + 10$: Si toutes les options ont été exercées pendant la période d'exercice, l'entreprise doit alors comptabiliser une écriture classique correspondant à l'émission de nouvelles actions au prix d'exercice (100 € dans notre exemple). A ce stade, on connaît, de plus, le nombre n d'options effectivement exercées. Le bilan s'équilibre alors de la manière suivante :
 - B : Banque = $100 \times n$ €
 - B : Capitaux Propres (capital+ prime d'émission) = $100 \times n$ €

Comme les montants principaux auxquels ils sont associés, les changements d'estimations demeurent neutres sur le montant des capitaux propres, y compris résultat, l'augmentation des charges de personnel ayant pour contrepartie directe le crédit des capitaux propres, au terme d'un jeu de vases communicants entre le résultat et les capitaux propres hors résultat.

3.3 Les actions gratuites : une remise en cause des stock-options ?

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2.3, les actions gratuites peuvent devenir une véritable alternative aux stock-options pour la constitution du package de rémunération des dirigeants. Ailleurs c'est déjà le cas. En Angleterre par exemple les entreprises attribuent depuis longtemps des "performance shares" aux dirigeants dans le cadre du renforcement de la gouvernance d'entreprise. Plus récemment, dans d'autres pays (Etats-Unis et Pays-Bas par exemple) les stock-options sont remises en cause. Les raisons sont multiples :

- Valeur perçue des stock-options en déclin suite à la chute des bourses.
- Coût d'attribution élevé pour l'entreprise suite à l'introduction d'IFRS 2 et SFAS 123.
- Effet dilutif sur le capital potentiellement élevé.
- Manque de visibilité des dirigeants sur le cours boursier qui est souvent mû par des facteurs exogènes.

Cependant, décriées après l'éclatement de la bulle Internet, les stock-options ne sont pas pour autant définitivement enterrées. En France, c'est un outil de rétribution qui demeure fiscalement intéressant et exonéré de charges sociales, à condition de respecter une période d'indisponibilité fiscale de quatre ans. C'est encore un élément fort d'un package compétitif. En effet, ils offrent une rémunération différée et hypothétique. Ainsi, même si la situation est plus compliquée aujourd'hui, les stock-options restent un instrument d'incitation qui fidélise et responsabilise les cadres supérieurs.

⁴dans la section charges de personnel

⁵partie capitaux propres : prime d'émission

Conclusion

Après avoir replacé le contexte général des plans de stock-options et de la norme IFRS 2, on a pu souligner l'importance de l'évaluation des options attribuées aux employés. En effet, toute l'information comptable repose sur le calcul de la juste valeur de ces instruments de capitaux propres à la date d'attribution. Notre modèle s'est efforcé d'intégrer les principales caractéristiques des stock-options comme la période d'indisponibilité et le phénomène d'exercice anticipé. Nous avons ainsi développé et implémenté une formule qui donne, dans ce contexte, la juste valeur des stock-options. De plus, nous avons eu recours aux simulations de Monte-Carlo pour, dans un premier temps, vérifier les calculs analytiques, puis pour élargir les hypothèses de notre modèle. Les principales conclusions sont les suivantes :

- Le modèle de Black & Scholes surestime fortement la valeur des options attribuées aux employés.
- Hormis la volatilité, les paramètres intervenant dans cette dernière approche ont une influence réduite sur la valorisation à cause de l'exercice anticipé et de la perte de la valeur temps de l'option.
- La rapidité de calcul de notre formule laisse libre cours à une évaluation au cas par cas : chaque bénéficiaire possède des caractéristiques qui lui sont propres en matière d'exercice anticipé.

On a vu également que la comptabilisation s'appuie sur le taux de turnover de la période d'indisponibilité pour estimer la juste valeur des options attribuées. Chaque année, jusqu'à la période d'exercice, le nombre d'option est réajusté pour prendre en compte les départs effectifs.

Bibliographie

- [1] International Accounting Standards Board 2. Share-Based Payment, 2004.
- [2] Marc Amblard. La comptabilisation des stock-options : comptabilité d'entreprise ou comptabilité d'actionnaire? Working Paper, Université de Provence, 2002.
- [3] E. Biffis. Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations. Working Paper, Université Bocconi, 2004.
- [4] F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–654, 1973.
- [5] Financial Accounting Standards Board. Accounting for Stock-Based Compensation. FASB Statement 123, 1995.
- [6] Financial Accounting Standards Board. Proposed Statement of Financial Accounting Standards. Share-Based Payment : an Amendment of FASB Statements 123 and 95, 2004a.
- [7] J. Carpenter. The Exercise and Valuation of Executive Stock Options. *Journal of Financial Economics*, 48(2) :127–158, 1998.
- [8] P. Carr and V. Linetsky. The Valuation of Executive Stock Options in an Intensity-Based Framework. *European Finance Review*, 4 :211–230, 2000.
- [9] Don M. Chance and Tung-Hsiao Yang. Expected Utility Valuation Of Executive Stock Options In A Binomial Framework : A Comparative Analysis . Working Paper, Luisiana State University, July 2004.
- [10] J. Cvitanić, Z. Wiener, and F. Zapatero. Analytic Pricing of Employee Stock Options. Working Paper, October 2004.
- [11] Nicole El Karoui and Lionel Martellini. Dynamic Asset Pricing Theory With Uncertain Time-Horizon. Working Paper, 2001.
- [12] Chloé Guillot-Soulez. Comment mesurer la performance des plans d'options sur actions? Les liens inévitables entre le social et le financier. Working Paper, Doctorante GREGOR, 2004.
- [13] Brian J. Hall and Kevin J. Murphy. Stock options for undiversified investors. *Journal of Accounting and Economics*, 33 :3–42, 2002.
- [14] J. Hull and A. White. How to Value Employee Stock Options. *Financial Analysts Journal*, 60(1) :114–119, 2004.
- [15] Peter Løchte Jørgensen. American-style Indexed Executive Stock Options. *European Finance Review*, 6 :321–358, 2002.
- [16] I Karatzas and S.E Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus – Second Edition*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [17] D. Lando. On Cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research*, 2 :99–120, 1998.
- [18] Frédéric Planchet and Pierre Therond. Evaluation de l'engagement de l'entreprise associé à un plan de stock-options. Working Paper, September 2003.
- [19] F. Quittard-Pinon. *Mathématiques financières*. ems, 2002.
- [20] P. Raupach. The Valuation of Employee Stock Options - How Good is the Standard? Working Paper, Goethe University Frankfurt am Main, January 2003.

- [21] P. Raupach. The Cost of Employee Stock Options. Working Paper, Goethe University Frankfurt am Main, February 2004.
- [22] M. Rubinstein. On the Accounting Valuation of Employee Stock Options. *Journal of Derivatives*, 3 :8–24, 1995.
- [23] R. Sircar and W. Xiong. A general Framework for Evaluating Executive Stock Options. Working Paper, Princeton University, January 2005.
- [24] L. Tourtier, J. Lambrechts, and X. Paper. IFRS 2 : Pratique - Enjeux - Impact. *Rémunération Globale*, Janvier 2005.
- [25] Ernst & Young. IFRS 2 Share-Based Payment : An Overview of the New Standard. May 2004.

Annexe A

Calcul des sous-options

Dans cette Annexe, l'expression des "sous-options" est reprise et le calcul analytique est achevé. Les démonstrations s'appuient essentiellement sur les propriétés de la gaussienne (dénotée par $n(x)$) et du mouvement brownien pour la loi du premier instant de passage du processus au-delà d'une barrière. De plus, nous avons placé en Annexe B, les éléments mathématiques structurellement indépendants mais utiles au calcul des C^x . Les démonstrations évoquées sont parfois assez fastidieuses. C'est pourquoi, un lecteur pressé pourra sauter certaines d'entre elles lors d'une première lecture. En outre, les formules développées dans cette Annexe ont été implémentées en C++ puis validées parallèlement par simulation de Monte Carlo : voir (2.3).

A.1 Calcul du prix de l'option dans le scénario A

$$\begin{aligned} C^a &= \mathbb{E} \left[e^{-rT_0} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] \\ &= e^{-rT_0} \left(\mathbb{E} \left[S_{T_0} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] - K \mathbb{P}(S_{T_0} \geq L) \right) \end{aligned}$$

car on a $S_{T_0} \geq K$ sur l'ensemble $\{S_{T_0} \geq L\}$ puisque $L \geq K$.

Si l'on note $S_0 = s$ et $r_d = r - d$ avec d le taux continu de dividende :

$$\begin{aligned} x_L &= \frac{\ln(L/s)}{\sigma\sqrt{T_0}} - (r_d - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\sqrt{T_0}}{\sigma} \\ x'_L &= \frac{\ln(L/s)}{\sigma\sqrt{T_0}} - (r_d + \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\sqrt{T_0}}{\sigma} \end{aligned} \tag{A.1}$$

On a :

$$\mathbb{P}(S_{T_0} \geq L) = \int_{x_L}^{+\infty} n(t) dt = 1 - \mathcal{N}(x_L) = \mathcal{N}(-x_L)$$

avec n la densité de la normale centrée réduite et \mathcal{N} sa fonction de répartition. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[S_{T_0} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] &= s \int_{x_L}^{+\infty} \exp \left((r_d - \frac{1}{2}\sigma^2)T_0 + \sigma t \sqrt{T_0} \right) n(t) dt \\ &= s e^{r_d T_0} \int_{x_L}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t - \sigma\sqrt{T_0})^2} dt \\ &= s e^{r_d T_0} \mathcal{N}(-x'_L) \end{aligned}$$

On a donc :

$$C^a = s e^{-d T_0} \mathcal{N}(-x'_L) - K e^{-r T_0} \mathcal{N}(-x_L) \tag{A.2}$$

A.2 Calcul du prix de l'option dans le scénario B

On procède d'abord par conditionnement sur \mathcal{G}_{T_0} puis par calcul d'espérance s'appuyant sur la loi de τ_b :

$$\begin{aligned} C^b &= e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[e^{-(r+\lambda)\tau_b} \left(L e^{\alpha(\tau_b - T_0)} - K \right) \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \\ &= e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \left(L e^{-\alpha T_0} \mathbb{E} [e^{-(r-\alpha+\lambda)\tau_b} \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} | \mathcal{G}_{T_0}] - K \mathbb{E} [e^{-(r+\lambda)\tau_b} \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} | \mathcal{G}_{T_0}] \right) \right] \end{aligned}$$

Pour cela, il nous faut calculer :

$$\mathbb{E} [e^{-x\tau_b} \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} | \mathcal{G}_{T_0}] \quad (\text{A.3})$$

Du paragraphe 3.5 C p. 196 du livre de Karatzas et Shreve [16], on tire la loi de τ_b ¹ conditionnellement à l'information recueillie jusqu'en T_0 (\mathcal{G}_{T_0}) :

$$f_{\tau_b}(t) = \frac{-\tilde{L}}{\sigma \sqrt{2\pi(t-T_0)^3}} \exp \left(-\frac{(\tilde{L} + y_\alpha(t-T_0))^2}{2\sigma^2(t-T_0)} \right) \mathbb{1}_{\{t \geq T_0\}} \quad \text{avec :} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{array}{l} \tilde{L} = \ln(S_{T_0}/L) \\ y_\alpha = r_d - \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \end{array} \quad (\text{A.5})$$

Si l'on note :

$$y_x = \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2 x} \quad (\text{A.6})$$

De (A.4), (A.5) et (A.6) un calcul assez simple permet de transformer (A.3) en :

$$\int_{T_0}^T e^{-xt} f_{\tau_b}(t) dt = e^{-xT_0} \int_0^{T-T_0} e^{-xt} f_{\tau_b}(t+T_0) dt = e^{-xT_0} e^{\tilde{L} \frac{y_x - y_\alpha}{\sigma^2}} \underbrace{\int_0^{T-T_0} \frac{-\tilde{L}}{\sigma \sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} (\tilde{L} + y_x t)^2} dt}_{I_1}$$

I_1 peut se réécrire :

$$\int_0^{T-T_0} \frac{-\tilde{L}}{\sigma t^{3/2}} n \left(\frac{1}{\sigma} (\sqrt{t} y_x + \frac{\tilde{L}}{\sqrt{t}}) \right) dt$$

Il nous faut alors exploiter les propriétés de la gaussienne pour calculer cette dernière intégrale. En effet, on a :

$$e^{-\tilde{L} \frac{2y_x}{\sigma^2}} n \left(\frac{1}{\sigma} (\sqrt{t} y_x - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{t}}) \right) = n \left(\frac{1}{\sigma} (\sqrt{t} y_x + \frac{\tilde{L}}{\sqrt{t}}) \right) \quad (\text{A.7})$$

et donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} (\sqrt{t} y_x + \frac{\tilde{L}}{\sqrt{t}}) \right) + e^{-\tilde{L} \frac{2y_x}{\sigma^2}} \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} (-\sqrt{t} y_x + \frac{\tilde{L}}{\sqrt{t}}) \right) \right] = \frac{-\tilde{L}}{\sigma t^{3/2}} n \left(\frac{1}{\sigma} (\sqrt{t} y_x + \frac{\tilde{L}}{\sqrt{t}}) \right) \quad (\text{A.8})$$

Si l'on note

$$\boxed{P(s, T, y) = \left(\frac{s}{L}\right)^{\frac{y-y_\alpha}{\sigma^2}} \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} (\sqrt{T} y + \frac{\ln(s/L)}{\sqrt{T}}) \right) + \left(\frac{s}{L}\right)^{-\frac{(y+y_\alpha)}{\sigma^2}} \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} (-\sqrt{T} y + \frac{\ln(s/L)}{\sqrt{T}}) \right)} \quad (\text{A.9})$$

on trouve sur l'ensemble $\{S_{T_0} < L\}$:

$$\mathbb{E} [e^{-x\tau_b} \mathbb{1}_{\{\tau_b < T\}} | \mathcal{G}_{T_0}] = e^{-xT_0} P(S_{T_0}, T - T_0, y_x) \quad (\text{A.10})$$

¹Temps de première atteinte d'une barrière par un mouvement brownien avec dérive

D'après les notations (A.5),(A.9) et la formule précédente (A.10), on obtient alors :

$$C^b = Le^{-rT_0} \mathbb{E} \left[P \left(S_{T_0}, T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r - \alpha + \lambda)} \right) \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] - Ke^{-rT_0} \mathbb{E} \left[P \left(S_{T_0}, T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r + \lambda)} \right) \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \quad (\text{A.11})$$

En reprenant la notation (A.1) et en notant :

$$p(x) = se^{(r_d - \frac{1}{2}\sigma^2)T_0 + \sigma\sqrt{T_0}x} \quad (\text{A.12})$$

On a :

$$C^b = Le^{-rT_0} \int_{-\infty}^{x_L} P \left(p(x), T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r - \alpha + \lambda)} \right) n(x) dx - Ke^{-rT_0} \int_{-\infty}^{x_L} P \left(p(x), T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r + \lambda)} \right) n(x) dx \quad (\text{A.13})$$

A partir de (B.5) et de la notation (A.1), on peut écrire :

$$H(T, y) \doteq \int_{-\infty}^{x_L} P(p(x), T, y) n(x) dx = e^{-\sqrt{T_0}x_L \frac{y - y_\alpha}{\sigma}} B \left(\frac{\sqrt{T_0}(y - y_\alpha)}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{\sqrt{T}}{\sigma} y - \sqrt{\frac{T_0}{T}} x_L \right) + e^{\sqrt{T_0}x_L \frac{y + y_\alpha}{\sigma}} B \left(-\frac{\sqrt{T_0}(y + y_\alpha)}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, -\frac{\sqrt{T}}{\sigma} y - \sqrt{\frac{T_0}{T}} x_L \right) \quad (\text{A.14})$$

De (A.14) et de l'expression de C^b précédente (A.13), on obtient enfin :

$$C^b = Le^{-rT_0} H \left(T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r - \alpha + \lambda)} \right) - Ke^{-rT_0} H \left(T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r + \lambda)} \right) \quad (\text{A.15})$$

A.3 Calcul du prix de l'option dans le scénario D

Le calcul de C^c est une extension de celui qui mène à C^d . C'est pourquoi, dans un soucis de cohérence, nous avons choisi de développer d'abord le chemin qui conduit à C^d . On procède comme pour C^b par conditionnement sur \mathcal{G}_{T_0} . Puis on reconnaît une option à barrière de type "up-and-out" :

$$C^d = e^{-(r+\lambda)T} e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] = e^{-(r+\lambda)T} e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \mathbb{E} \left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \middle| \mathcal{G}_{T_0} \right] \right] = e^{-\lambda(T-T_0)} e^{-rT_0} e^{-d(T-T_0)} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \underbrace{\mathbb{E} \left[e^{-(r_d - \alpha)(T-T_0)} \left(S_T e^{-\alpha(T-T_0)} - K e^{-\alpha(T-T_0)} \right)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > T\}} \middle| \mathcal{G}_{T_0} \right]}_{E_{T_0}} \right]$$

On peut remarquer que E_{T_0} est le prix vu de T_0 d'un call "up-and-out" de barrière L dont les paramètres usuelles sont résumés dans le tableau suivant :

drift	volatilité	maturité	$S(0)$	strike
$r_\alpha \doteq r_d - \alpha$	σ	$T - T_0$	S_{T_0}	$K_\alpha(T - T_0) \doteq K e^{-\alpha(T-T_0)}$

(A.16)

La formule fermée d'une telle option est bien connue (voir [19]). A partir des notations introduites dans le tableau (A.16), E_{T_0} peut s'écrire :

$$E_{T_0} = Q(S_{T_0}, T - T_0, K_\alpha(T - T_0)) \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$\boxed{\begin{aligned} Q(s, T, K) &= C(s, T, K) - C(s, T, L) - \left(\frac{L}{s}\right)^u \left[C\left(\frac{L^2}{s}, T, K\right) - C\left(\frac{L^2}{s}, T, L\right) \right] \\ \text{avec } u &= \frac{2r_\alpha}{\sigma^2} - 1 \end{aligned}} \quad (\text{A.18})$$

Où l'expression de $C(s, T, Y)$ est proche du prix d'un call en 0 de maturité T , de prix d'exercice Y , de drift r_α , de volatilité σ . La différence réside dans l'actualisation du second terme qui se fait au taux r au lieu de r_α . En effet :

$$\boxed{\begin{aligned} C(s, T, Y) &= s\mathcal{N}(d_1(Y)) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2(Y)) \quad \text{avec :} \\ d_1(Y) &= \frac{\ln\left(\frac{s}{Y}\right) + (r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2(Y) &= \frac{\ln\left(\frac{s}{Y}\right) + (r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1(Y) - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}} \quad (\text{A.19})$$

En reprenant les notations (A.1), (A.12) et (A.16), les formules (A.18) et (A.19) on a :

$$C^d = e^{-\lambda(T-T_0)} e^{-rT_0} e^{-d(T-T_0)} \int_{-\infty}^{xL} Q(p(x), T - T_0, K_\alpha(T - T_0)) n(x) dx \quad (\text{A.20})$$

Il nous faut donc détailler $Q(p(x), T, K)$. En notant :

$$Q(p(x), T, K) = C(p(x), T, K) - C(p(x), T, L) - e^{u\sigma\sqrt{T_0}xL} e^{-u\sigma\sqrt{T_0}x} \left[C\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K\right) - C\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, L\right) \right] \quad (\text{A.21})$$

A partir de (B.5) et de la notation (A.1), on peut noter :

$$\boxed{\begin{aligned} A_1(T, Y) &\doteq \int_{-\infty}^{xL} C(p(x), T, Y) n(x) dx \\ &= se^{(r_d - \frac{\sigma^2}{2})T_0} B\left(\sigma\sqrt{T_0}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{s}{Y}\right) + (r_d - \frac{\sigma^2}{2})T_0 + (r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2})T \right] \right) \\ &\quad - Ke^{-r_d T} B\left(0, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{s}{Y}\right) + (r_d - \frac{\sigma^2}{2})T_0 + (r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T \right] \right) \end{aligned}} \quad (\text{A.22})$$

Et :

$$\boxed{\begin{aligned} A_2(T, Y) &\doteq \int_{-\infty}^{xL} e^{-u\sigma\sqrt{T_0}x} C\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, Y\right) n(x) dx \\ &= \frac{L^2}{s} e^{-(r_d - \frac{\sigma^2}{2})T_0} B\left(- (u+1)\sigma\sqrt{T_0}, -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{L^2}{sY}\right) - (r_d - \frac{\sigma^2}{2})T_0 + (r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2})T \right] \right) \\ &\quad - Ke^{-r_d T} B\left(-u\sigma\sqrt{T_0}, -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{L^2}{sY}\right) - (r_d - \frac{\sigma^2}{2})T_0 + (r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2})T \right] \right) \end{aligned}} \quad (\text{A.23})$$

De (A.21), (A.22), (A.23) et de l'expression de C^d précédente (A.20), on obtient enfin :

$$\boxed{C^d = e^{-\lambda(T-T_0)} e^{-rT_0} e^{-d(T-T_0)} [A_1(T - T_0, K_\alpha(T - T_0)) - A_1(T - T_0, L)] - e^{-\lambda(T-T_0)} e^{-rT_0} e^{-d(T-T_0)} e^{u\sigma\sqrt{T_0}xL} [A_2(T - T_0, K_\alpha(T - T_0)) - A_2(T - T_0, L)]} \quad (\text{A.24})$$

A.4 Calcul du prix de l'option dans le scénario C

On procède d'abord par conditionnement sur \mathcal{G}_{T_0} puis on se ramène au calcul de l'intégrale du cas précédent :

$$\begin{aligned} C^c &= \lambda e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \int_{T_0}^T e^{-(r+\lambda)t} (S_t - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > t\}} dt \right] \\ &= \lambda e^{\lambda T_0} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_{T_0}^T e^{-(r+\lambda)t} (S_t - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > t\}} dt \middle| \mathcal{G}_{T_0} \right]}_{E_{T_0}^I} \right] \end{aligned}$$

L'espérance conditionnelle précédente peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E_{T_0}^I &= \int_{T_0}^T \mathbb{E} \left[e^{-(r+\lambda)t} (S_t - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > t\}} \middle| \mathcal{G}_{T_0} \right] dt \\ &= e^{-rT_0} \int_{T_0}^T e^{-\lambda t} e^{-d(t-T_0)} \mathbb{E} \left[e^{-(r_d-\alpha)(t-T_0)} \left(S_t e^{-\alpha(t-T_0)} - K e^{-\alpha(t-T_0)} \right)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_b > t\}} \middle| \mathcal{G}_{T_0} \right] dt \\ &= e^{-r_d T_0} \int_{T_0}^T e^{-(\lambda+d)t} Q(S_{T_0}, t-T_0, K_\alpha(t-T_0)) dt \end{aligned}$$

en utilisant les notations (A.16), (A.17) et (A.18). Ainsi, C^c se réécrit :

$$C^c = e^{-rT_0} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \int_0^{T-T_0} \lambda e^{-\lambda t} Q(S_{T_0}, t, K_\alpha(t)) dt \right] \quad (\text{A.25})$$

On va donc calculer :

$$J(s, T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} Q(s, t, K e^{-\alpha t}) dt \quad (\text{A.26})$$

Où l'on rappelle que :

$$Q(s, t, K e^{-\alpha t}) = C(s, t, K e^{-\alpha t}) - C(s, t, L) - \left(\frac{L}{s}\right)^u \left[C\left(\frac{L^2}{s}, t, K e^{-\alpha t}\right) - C\left(\frac{L^2}{s}, t, L\right) \right] \quad (\text{A.27})$$

avec $u = \frac{2r_\alpha}{\sigma^2} - 1$

Et :

$$\begin{aligned} C(s, t, K e^{-\alpha t}) &= s \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln(\frac{s}{K})}{\sqrt{t}} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \sqrt{t} \right) \right) - K e^{-rt} \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln(\frac{s}{K})}{\sqrt{t}} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \sqrt{t} \right) \right) \\ C(s, t, L) &= s \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln(\frac{s}{L})}{\sqrt{t}} + (r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) \sqrt{t} \right) \right) - K e^{-rt} \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln(\frac{s}{L})}{\sqrt{t}} + (r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}) \sqrt{t} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(s, K) = \ln\left(\frac{s}{K}\right) \\ b(r) = r + \frac{\sigma^2}{2} \\ \hat{b}(r) = r - \frac{\sigma^2}{2} \\ b_\lambda(r) = \sqrt{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2\lambda} \\ c_\lambda(R, r) = \sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2(\lambda + R)} \end{array} \right. \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} I_1(s, T, K, r) &= s \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln(\frac{s}{K})}{\sqrt{t}} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \sqrt{t} \right) \right) dt \\ I_2(s, T, K, R, r) &= -K \int_0^T \lambda e^{-(\lambda+R)t} \mathcal{N} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln(\frac{s}{K})}{\sqrt{t}} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \sqrt{t} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A partir de (A.27), (A.28) et (A.30), $J(s, T)$ peut s'écrire :

$$J(s, T) = I_1(s, T, K, r) + I_2(s, T, K, r, r) - I_1(s, T, L, r_\alpha) - \frac{K}{L} I_2(s, T, L, r, r_\alpha) - \left(\frac{L}{s}\right)^u \left[I_1\left(\frac{L^2}{s}, T, K, r\right) + I_2\left(\frac{L^2}{s}, T, K, r, r\right) - I_1\left(\frac{L^2}{s}, T, L, r_\alpha\right) - \frac{K}{L} I_2\left(\frac{L^2}{s}, T, L, r, r_\alpha\right) \right] \quad (\text{A.31})$$

Calcul de $I_1(s, T, K, r)$

En utilisant les notations (A.29) et en omettant par commodité les arguments des fonctions définies, on a :

$$I_1(s, T, K, r) = s \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)\right) dt = s \hat{I}_1(s, T, K, r)$$

Une intégration par partie donne :

$$\hat{I}_1(s, T, K, r) = \mathbb{1}_{\{s > K\}} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{s=K\}} - e^{-\lambda T} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{a}{\sqrt{T}} + b\sqrt{T}\right)\right) + I_3(s, T, K, r)$$

avec

$$I_3(s, T, K, r) = e^{\frac{a(b_\lambda - b)}{\sigma^2}} \int_0^T \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{b}{t^{1/2}} - \frac{a}{t^{3/2}}\right) n\left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b_\lambda \sqrt{t}\right)\right) dt \quad (\text{A.32})$$

On va pouvoir calculer cette dernière intégrale grâce à la remarque suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)\right) = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{b}{t^{1/2}} - \frac{a}{t^{3/2}}\right) n\left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)\right) \quad (\text{A.33})$$

Il nous faut également exploiter les remarques (A.7) et (A.8) pour obtenir une expression analytique de I_3 . Ainsi, on a :

$$I_1(s, T, K, r) = s \left[\mathbb{1}_{\{s > K\}} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{s=K\}} - e^{-\lambda T} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) + I_3(s, T, K, r) \right] \quad (\text{A.34})$$

$$I_3(s, T, K, r) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b(r)}{b_\lambda(r)}\right) e^{-\frac{b(r)-b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b(r)}{b_\lambda(r)}\right) e^{-\frac{b(r)+b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b(r)}{b_\lambda(r)}\right) e^{-\frac{b(r)-b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathbb{1}_{\{s > K\}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b(r)}{b_\lambda(r)}\right) e^{-\frac{b(r)+b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathbb{1}_{\{s > K\}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{b(r)-b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathbb{1}_{\{s=K\}} \quad (\text{A.35})$$

Calcul de $I_2(s, T, K, R, r)$

Les expressions de I_1 et I_2 étant très similaires, on procède exactement de la même façon que précédemment. En exploitant les notations (A.29), on obtient :

$$I_2(s, T, K, R, r) = -\frac{\lambda K}{\lambda + R} \left[\mathbb{1}_{\{s > K\}} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{s=K\}} - e^{-(\lambda+R)T} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) + I_4(s, T, K, R, r) \right] \quad (\text{A.36})$$

$$I_4(s, T, K, R, r) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hat{b}(r)}{c_\lambda(R, r)}\right) e^{-\frac{\hat{b}(r)-c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) + \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{b}(r)}{c_\lambda(R, r)}\right) e^{-\frac{\hat{b}(r)+c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{s}{K}\right) - \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hat{b}(r)}{c_\lambda(R, r)}\right) e^{-\frac{\hat{b}(r)-c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathbb{1}_{\{s > K\}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{b}(r)}{c_\lambda(R, r)}\right) e^{-\frac{\hat{b}(r)+c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathbb{1}_{\{s > K\}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{\hat{b}(r)-c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln\left(\frac{s}{K}\right)} \mathbb{1}_{\{s=K\}} \quad (\text{A.37})$$

On peut remarquer que les expressions de I_3 et I_4 sont très proches.

En effet, pour passer de l'une à l'autre, il suffit de remplacer : $b(r)$ par $\hat{b}(r)$ et $b_\lambda(r)$ par $c_\lambda(R, r)$.

Retour sur le calcul de C^c

En reprenant les notations (A.1),(A.12) et les formules (A.25),(A.26), C^c peut s'écrire :

$$C^c = e^{-rT_0} \int_{-\infty}^{x_L} J(p(x), T - T_0) n(x) dx \quad (\text{A.38})$$

A partir de (A.1), (A.27) et de (A.29), on peut noter :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_Y = \frac{\ln(Y/s)}{\sigma\sqrt{T_0}} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{\sqrt{T_0}}{\sigma} \\ \hat{s}_1 = se^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T_0} \\ \hat{s}_2 = Le^{(1+u)\sigma\sqrt{T_0}x_L} \\ \hat{s}_3 = e^{u\sigma\sqrt{T_0}x_L} \\ d_1(Y) = \ln\left(\frac{s}{Y}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T_0 \\ d_2(Y) = \ln\left(\frac{s}{Y}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T_0 \\ b_+(r) = b_\lambda(r) + \hat{b}(r) \\ b_-(r) = b_\lambda(r) - \hat{b}(r) \\ \hat{b}_+(R, r) = c_\lambda(R, r) + \hat{b}(r) \\ \hat{b}_-(R, r) = c_\lambda(R, r) - \hat{b}(r) \end{array} \right. \quad (\text{A.39})$$

Calcul de $I_1(p(x), T, K, r)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$ ² :

$$\begin{aligned} I_1(p(x), T, K, r) = & \hat{s}_1 \left[e^{\sigma\sqrt{T_0}x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} - e^{-\lambda T} e^{\sigma\sqrt{T_0}x} \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0}(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2})x} \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0}(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2})x} \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0}(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2})x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0}(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2})x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Calcul de $I_2(p(x), T, K, R, r)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$:

$$\begin{aligned} I_2(p(x), T, K, R, r) = & -\frac{\lambda K}{\lambda + R} \left[\mathbb{1}_{\{x > x_K\}} - e^{-(\lambda + R)T} \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}x} \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}x} \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

²le calcul de l'intégrale (A.38) ignore les termes " $\mathbb{1}_{\{x=x_K\}}$ "

Calcul de $\left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_1\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, r\right)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_1\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, r\right) &= \hat{s}_2 \left[e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u)x} \mathbb{1}_{\{x < x_{\frac{L^2}{K}}\}} - e^{-\lambda T} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u)x} \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_-(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u+\frac{b_-(r)}{\sigma^2})x} \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_+(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u-\frac{b_+(r)}{\sigma^2})x} \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_-(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u+\frac{b_-(r)}{\sigma^2})x} \mathbb{1}_{\{x < x_{\frac{L^2}{K}}\}} - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_+(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u-\frac{b_+(r)}{\sigma^2})x} \mathbb{1}_{\{x < x_{\frac{L^2}{K}}\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Calcul de $\left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_2\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, R, r\right)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_2\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, R, r\right) &= -\frac{\lambda K}{\lambda+R} \hat{s}_3 \left[e^{-\sigma u \sqrt{T_0} x} \mathbb{1}_{\{x < x_{\frac{L^2}{K}}\}} - e^{-(\lambda+R)T} e^{-\sigma u \sqrt{T_0} x} \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_-(R,r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(\frac{\hat{b}_-(R,r)}{\sigma^2}+u)x} \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{c_\lambda(R,r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_+(R,r)}{\sigma^2}} e^{+\sigma\sqrt{T_0}(\frac{\hat{b}_+(R,r)}{\sigma^2}-u)x} \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{c_\lambda(R,r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_-(R,r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(\frac{\hat{b}_-(R,r)}{\sigma^2}+u)x} \mathbb{1}_{\{x < x_{\frac{L^2}{K}}\}} - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_+(R,r)}{\sigma^2}} e^{+\sigma\sqrt{T_0}(\frac{\hat{b}_+(R,r)}{\sigma^2}-u)x} \mathbb{1}_{\{x < x_{\frac{L^2}{K}}\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

En utilisant la remarque (B.4) et le paragraphe (B.2.2), on peut enfin calculer :

$$\begin{aligned} D_1(T, K, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} I_1(p(x), T, K, r) n(x) dx = \\ &\hat{s}_1 \left[e^{-\frac{\sigma^2 T_0}{2}} \left[\mathcal{N}(x_L - \sigma\sqrt{T_0}) - \mathcal{N}(x_K - \sigma\sqrt{T_0}) \right] - e^{-\lambda T} B\left(\sigma\sqrt{T_0}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} B\left(\sigma\sqrt{T_0}\left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right), \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} B\left(\sigma\sqrt{T_0}\left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right), \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &- \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2 T_0}{2}\left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)^2} \left[\mathcal{N}\left(x_L - \sigma\sqrt{T_0}\left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)\right) - \mathcal{N}\left(x_K - \sigma\sqrt{T_0}\left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)\right) \right] \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2 T_0}{2}\left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)^2} \left[\mathcal{N}\left(x_L - \sigma\sqrt{T_0}\left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)\right) - \mathcal{N}\left(x_K - \sigma\sqrt{T_0}\left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)\right) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned} D_2(T, K, R, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} I_2(p(x), T, K, R, r) n(x) dx = \\ &-\frac{\lambda K}{\lambda+R} \left[\mathcal{N}(x_L) - \mathcal{N}(x_K) - e^{-(\lambda+R)T} B\left(0, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R,r)}{\sigma^2}} B\left(\sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_-(R,r)}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{c_\lambda(R,r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R,r)}{\sigma^2}} B\left(-\sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_+(R,r)}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{c_\lambda(R,r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R,r)}{\sigma^2}} e^{-\frac{T_0\hat{b}_-(R,r)}{2\sigma^2}} \left[\mathcal{N}\left(x_L - \sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_-(R,r)}{\sigma}\right) - \mathcal{N}\left(x_K - \sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_-(R,r)}{\sigma}\right) \right] \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R,r)}{c_\lambda(R,r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R,r)}{\sigma^2}} e^{-\frac{T_0\hat{b}_+(R,r)}{2\sigma^2}} \left[\mathcal{N}\left(x_L + \sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_+(R,r)}{\sigma}\right) - \mathcal{N}\left(x_K + \sqrt{T_0}\frac{\hat{b}_+(R,r)}{\sigma}\right) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned}
G_1(T, K, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} \left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_1\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, r\right) n(x) dx = \\
&\hat{s}_2 \left[e^{\frac{\sigma^2 T_0 (1+u)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\min(x_L, x_{\frac{L^2}{K}}) + \sigma\sqrt{T_0}(1+u)\right) - e^{-\lambda T} B\left(-\sigma\sqrt{T_0}(1+u), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\
&+ \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_-(r)}{\sigma^2}} B\left(-\sigma\sqrt{T_0}\left(1+u + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_+(r)}{\sigma^2}} B\left(-\sigma\sqrt{T_0}\left(1+u - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
&- \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_-(r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2}(1+u + \frac{b_-(r)}{\sigma^2})^2} \mathcal{N}\left(\min(x_L, x_{\frac{L^2}{K}}) + \sigma\sqrt{T_0}\left(1+u + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)\right) \\
&\left. - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})b_+(r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2}(1+u - \frac{b_+(r)}{\sigma^2})^2} \mathcal{N}\left(\min(x_L, x_{\frac{L^2}{K}}) + \sigma\sqrt{T_0}\left(1+u - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)\right) \right] \tag{A.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(T, K, R, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} \left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_2\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, R, r\right) n(x) dx = \\
&- \frac{\lambda K}{\lambda + R} \hat{s}_3 \left[e^{\frac{\sigma^2 u^2 T_0}{2}} \mathcal{N}\left(\min(x_L, x_{\frac{L^2}{K}}) + \sigma\sqrt{T_0}u\right) - e^{-(\lambda+R)T} B\left(-\sigma\sqrt{T_0}u, -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right. \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} B\left(-\sigma\sqrt{T_0}\left(\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} + u\right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} B\left(\sigma\sqrt{T_0}\left(\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} - u\right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
&- \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2}\left(\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} + u\right)^2} \mathcal{N}\left(\min(x_L, x_{\frac{L^2}{K}}) + \sigma\sqrt{T_0}\left(\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} + u\right)\right) \\
&\left. - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_2(\frac{Ks^2}{L^2})\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2}\left(\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} - u\right)^2} \mathcal{N}\left(\min(x_L, x_{\frac{L^2}{K}}) - \sigma\sqrt{T_0}\left(\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} - u\right)\right) \right] \tag{A.47}
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de (A.26), (A.31), (A.38) et des notations (A.44), (A.45), (A.46) et (A.47) on trouve enfin :

$$\boxed{
\begin{aligned}
C^c &= e^{-rT_0} \int_{-\infty}^{x_L} J(p(x), T - T_0) n(x) dx \\
&= e^{-rT_0} \left[D_1(T - T_0, K, r) + D_2(T - T_0, K, r, r) - D_1(T - T_0, L, r_\alpha) - \frac{K}{L} D_2(T - T_0, L, r, r_\alpha) \right. \\
&\quad \left. - G_1(T - T_0, K, r) - G_2(T - T_0, K, r, r) + G_1(T - T_0, L, r_\alpha) + \frac{K}{L} G_2(T - T_0, L, r, r_\alpha) \right] \tag{A.48}
\end{aligned}$$

Annexe B

Quelques outils mathématiques . . .

B.1 Processus à intensité

Cette présentation est tirée de [3] et [17]. Formellement, τ_λ peut être vu comme le premier instant de saut d'un processus de comptage N non explosif et adapté à \mathbb{F} : $\tau_\lambda = \inf\{t \geq 0, N_t = 1\}$. On rappelle qu'un temps d'arrêt τ_λ admet une intensité λ si et seulement si λ est un processus prévisible positif tel que $\int_0^t \lambda_s ds < \infty$ p.s pour tout $t \geq 0$ et le processus compensé $M = \left(N_t - \int_0^t \lambda_s ds\right)_{t \geq 0}$ est une \mathbb{F} -martingale locale. Si de plus, on a $\mathbb{E} \left[\int_0^t \mu(s) ds \right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$ alors M est une \mathbb{F} -martingale.

B.1.1 Processus de Cox

Si le processus de comptage N est un processus de Cox ou "doubly stochastic process" par rapport à une sous filtration \mathbb{G} de \mathbb{F} , d'intensité λ \mathbb{G} -prévisible. C'est à dire : conditionnellement à la connaissance de l'évolution de λ jusqu'à une date t , N_t est un processus de Poisson inhomogène de paramètre $\int_0^t \lambda_s ds$. On a donc pour $T \geq t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(N_T - N_t = k | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) = \frac{\left(\int_t^T \mu_s ds\right)^k}{k!} e^{-\int_t^T \mu_s ds} \quad (\text{B.1})$$

La filtration \mathbb{G} fournit l'information sur la tendance du taux d'exercice (l'évolution de λ_t) mais ne permet pas de décider à un instant t si l'exercice a eu lieu. Cette information est contenue dans la filtration \mathbb{F} par rapport à laquelle τ est un temps d'arrêt. En résumé, même en connaissant la perspective d'exercice d'un bénéficiaire, l'événement d'exercice est perçu comme une surprise totale, il est totalement imprévisible (alors que la tendance λ l'est).

À partir de (B.1), on peut définir la probabilité conditionnelle de survie et la densité conditionnelle de τ . En effet, si l'on se restreint à l'événement $\{\tau > t\}$, on a :

$$\mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \mu_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.2})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbb{P}(\tau \leq s | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E} \left[\mu_s e^{-\int_t^s \mu_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.3})$$

Nous montrons ici comment B.1 conduit à B.2 :

$$\begin{aligned} P(\tau > T | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(N_t = 0, N_T - N_t = 0 | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{1}_{\{N_t=0\}} \mathbb{P}(N_T - N_t = 0 | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left[\mathbb{P}(N_T - N_t = 0 | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \mu_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

B.2 Quelques outils mathématiques pour le calcul des sous-options

B.2.1 Exponentielle-gaussienne

$$\int_a^b e^{cx} n(x) dx = e^{\frac{c^2}{2}} [\mathcal{N}(b-c) - \mathcal{N}(a-c)] \quad (\text{B.4})$$

B.2.2 Loi normale bivariée

Toutes les intégrales peuvent se mettre sous forme de combinaisons linéaires d'intégrales de la forme¹ :

$$\begin{aligned} B(a, b, c) &\doteq \int_{-\infty}^{x_L} e^{ax} \mathcal{N}(bx+c) n(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{x_L} e^{ax} \int_{-\infty}^{bx+c} n(y) n(x) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{x_L} \int_{-\infty}^c e^{ax} n(bx+y) n(x) dy dx \\ &= e^{\frac{a^2}{2}} \int_{-\infty}^{x_L} \int_{-\infty}^c \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1+b^2)(x-a)^2 - b(y+ab)(x-a) - \frac{1}{2}(y+ab)^2 \right\} dy dx \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} e^{ax} n(bx+y) n(x) &= \frac{1}{2\pi} \exp(u) \quad \text{avec :} \\ u &= -\frac{1}{2}(b^2+1)x^2 + ax - bxy - \frac{1}{2}y^2 \\ &= -\frac{1}{2}(b^2+1)(x-a)^2 + \frac{1}{2}(b^2+1)a^2 - b^2ax - bxy - \frac{1}{2}y^2 \\ &= -\frac{1}{2}(1+b^2)(x-a)^2 - b(y+ab)(x-a) - \frac{1}{2}(y+ab)^2 + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

On peut donc relier l'intégrale B à la fonction de répartition d'une loi normale bivariée. En effet :

$$B(a, b, c) \doteq \int_{-\infty}^{x_L} e^{ax} \mathcal{N}(bx+c) n(x) dx = e^{\frac{a^2}{2}} \mathbb{P}(X \leq x_L, Y \leq c) \quad (\text{B.5})$$

où (X, Y) est un couple aléatoire de loi normale bivariée de paramètres :

μ_X	μ_Y	σ_X^2	σ_Y^2	ρ
a	$-ab$	1	$1+b^2$	$-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$

(B.6)

¹Voir Notation (A.1) pour x_L