

Analyse du Risque et Couverture des Tranches de CDO Synthétique

Areski Cousin

Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière
ISFA, Université Lyon 1

Soutenance de Thèse, Lyon, 17 Octobre 2008
Directeur de Thèse : Jean-Paul Laurent



Plan de la présentation

- 1 Analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur
 - Les modèles à facteur pour l'évaluation des tranches de CDO
 - Analyse comparative de la dépendance

- 2 Couverture des tranches de CDO dans les modèles de contagion
 - Approche théorique
 - Résultats et remarques

Notation

- Portefeuille de crédit composé de n obligations risquées
- τ_1, \dots, τ_n temps de défaut
- $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) = (1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, 1_{\{\tau_n \leq t\}})$: les indicatrices de défaut à la date t
- M_1, \dots, M_n pertes en cas de défaut
- Les cash-flows des tranches de CDO sont gouvernés par le processus de la **perte agrégée** :

$$L_t = \sum_{i=1}^n M_i 1_{\{\tau_i \leq t\}}$$

- L'évaluation des tranches de CDO repose sur les **lois marginales** de la perte agrégée

Les modèles à facteur

- Existents depuis longtemps pour modéliser des rendements d'action ou de fonds mutuels
- Modèles de dépendance compréhensibles et simples à manipuler : τ_1, \dots, τ_n indépendants conditionnellement à un facteur aléatoire
- Parcimonie des paramètres de dépendance
- Existence de méthodes semi-analytiques pour déterminer la loi de la perte
- Approche préconisée par le comité de Bâle II (Approche IRB)

Théorème de De Finetti et représentation à facteur

- Temps de défaut **échangeables**

$$(\tau_1, \dots, \tau_n) \stackrel{d}{=} (\tau_{\sigma(1)}, \dots, \tau_{\sigma(n)})$$

pour toute permutation σ

- Conséquences :
 - Mêmes marginales, mêmes lois des couples, même lois jointes des sous-ensembles de même taille
 - En particulier, $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) = (1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, 1_{\{\tau_n \leq t\}})$ échangeable pour tout t

Théorème de De Finetti et représentation à facteur

- D_1, \dots, D_n, \dots suite de Bernoulli échangeables
- **Théorème de De Finetti** : il existe un facteur aléatoire \tilde{p} de support $[0, 1]$ tel que :
 - D_1, \dots, D_n soient conditionnellement indépendants sachant \tilde{p}
 - Si ν représente la loi de \tilde{p} , $d_i = 0, 1, i = 1, \dots, n, s = \sum_{i=1}^n d_i$, alors :

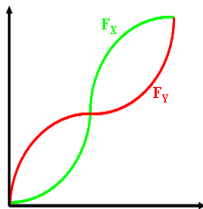
$$\mathbb{Q}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n) = \int_0^1 p^s (1-p)^{(n-s)} \nu(dp).$$

- **Echangeabilité au sens strict** garantit seulement l'existence d'une **mesure signée Jaynes (1986)**
- \tilde{p} caractérisé par la perte d'un **portefeuille infiniment granulaire** :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s.} \tilde{p} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Ordre convexe

- Compare le **niveau de dispersion** de deux variables aléatoires
- $X \leq_{cx} Y$ if $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction convexe f
- Comparaison de **primes stop-loss** :
 - $X \leq_{cx} Y \Rightarrow \mathbb{E}[(X - K)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - K)^+]$ pour tout $K \in \mathbb{R}$
- Comparaison de **mesures de risque convexes** (Bäuerle et Müller (2005)) :
 - $X \leq_{cx} Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ pour toute mesure de risque convexe et invariante en loi ρ
- $X \leq_{cx} Y$ si $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ et F_X , la fonction de répartition de X et F_Y , la fonction de répartition de Y vérifient une **condition de croisement** :



Ordre supermodulaire

- Compare le **niveau de dépendance interne** de deux vecteurs aléatoires
- $(X_1, \dots, X_n) \leq_{sm} (Y_1, \dots, Y_n)$ si $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] \leq \mathbb{E}[f(Y_1, \dots, Y_n)]$ pour toute fonction supermodulaire f
- Comparaison au niveau du risque agrégé : Müller (1997)

$$(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*) \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i D_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n M_i D_i^*$$

- $M_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ conjointement indépendants de (D_1, \dots, D_n) et (D_1^*, \dots, D_n^*)

Ordre supermodulaire

- $(X_1, \dots, X_n) \leq_{sm} (Y_1, \dots, Y_n)$ si $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] \leq \mathbb{E}[f(Y_1, \dots, Y_n)]$ pour toute fonction supermodulaire f

Definition (fonction supermodulaire)

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est **supermodulaire** si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i < j \leq n$ et $\varepsilon, \delta > 0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ \geq f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Résultats principaux

- Extension d'un résultat de [Lefèvre et Utev \(1996\)](#)
- Comparaison de **portefeuilles de crédit échangeables** à l'aide des "probabilités mélanges" associées
 - **Portefeuille 1** : D_1, \dots, D_n Bernoulli échangeables associées à \tilde{p}
 - **Portefeuille 2** : D_1^*, \dots, D_n^* Bernoulli échangeables associées à \tilde{p}^*

Theorem

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$$

- Pertes : $L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_i$ et $L_t^* = \sum_{i=1}^n M_i D_i^*$
- Si $\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*$, alors :
 - $\mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+]$ pour tout $a > 0$.
 - $\rho(L_t) \leq \rho(L_t^*)$ pour toute mesure de risque convexe ρ

Résultats principaux

- Implication réciproque :
 - D_1, \dots, D_n, \dots suite de Bernoulli échangeable associée à \tilde{p}
 - $D_1^*, \dots, D_n^*, \dots$ suite de Bernoulli échangeable associée à \tilde{p}^*

Theorem

$$(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*.$$

- Caractérisation de l'ordre supermodulaire pour les suites de Bernoulli échangeables

Comparaison du risque des tranches de CDO

- Un grand nombre d'approches couramment étudiées peut être regroupé dans la classe des modèles à facteur
 - Modèles à facteur basés sur des fonctions copules (copule gaussienne, copule de Student, copules archimédiennes)
 - Modèles à chocs communs - [Lindskog et McNeil \(2003\)](#)
 - Modèles structurels multivariés - [Hull, Predescu et White \(2005\)](#)
 - Modèles à intensité affine - [Duffie et Gârleanu \(2001\)](#)
- Pour la plupart de ces modèles, l'augmentation des paramètres de dépendance entraîne :
 - Une diminution de la prime des tranches equity
 - Une augmentation de la prime des tranches senior
 - Une augmentation des mesures convexes de risque sur la perte agrégée

Exemple : modèles à facteur additif

- La structure de dépendance des temps de défaut est régie par des variables latentes V_1, \dots, V_n telles que :
- $V_i = \rho V + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{V}_i, i = 1 \dots n$
- où $V, \bar{V}_i, i = 1 \dots n$ sont indépendantes
- Les temps de défaut sont définis par : $\tau_i = G^{-1}(H_\rho(V_i)), i = 1 \dots n$
 - où G : fonction de répartition de τ_i
 - et H_ρ : fonction de répartition de V_i
- $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}, i = 1 \dots n$ sont indépendantes connaissant le facteur V
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{P.S} E[D_i | V] = P(\tau_i \leq t | V) = \tilde{p}_t$

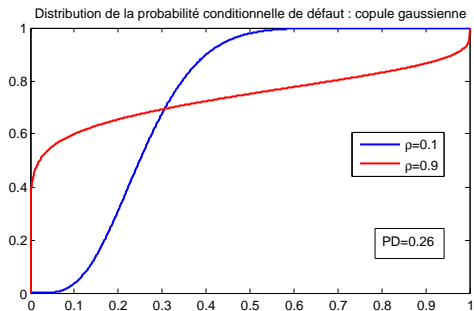
Exemple : modèles à facteur additif

Theorem

Pour tout horizon t , notons $D_i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1 \dots n$ et

$D_i^* = 1_{\{\tau_i^* \leq t\}}$, $i = 1 \dots n$ les indicatrices de défaut correspondantes à (resp.) ρ et ρ^* , alors :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow \tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*$$



Synthèse

- Dans le cas de **portefeuilles homogènes**, l'hypothèse d'indépendance conditionnelle n'est plus restrictive grâce au **théorème de De Finetti**
- La **probabilité conditionnelle de défaut** joue un rôle prépondérant à la fois pour
 - la détermination des lois marginales de la perte
 - l'analyse de l'effet des paramètres de dépendance sur le risque des tranches de CDO
- Cependant, les modèles à facteur ne reflètent pas directement le **phénomène de contagion**

Plan de la présentation

- 1 Analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur
 - Les modèles à facteur pour l'évaluation des tranches de CDO
 - Analyse comparative de la dépendance
- 2 Couverture des tranches de CDO dans les modèles de contagion
 - Approche théorique
 - Résultats et remarques

Introduction

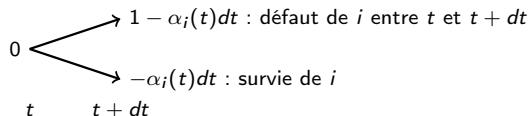
- Marché action, taux d'intérêt : modèles d'évaluation de produits dérivés reposent sur des arguments de réplification
- Sur les marchés des CDOs, ce n'est pas le cas :
 - Interaction entre risque de spread et risque de défaut, grande dimension du portefeuille de crédit, incertitude sur les taux de recouvrement
 - En pratique, couverture locale du risque de spread dans un modèle copule gaussienne - base corrélation
- Nécessité de relier l'évaluation des dérivés de crédit au prix de la couverture

Temps de défaut

- Portefeuille composé de n entités de référence
- Temps de défaut : τ_1, \dots, τ_n définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- Indicatrices de défaut : $D_i(t) = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1, \dots, n$
- $\mathcal{H}_{i,t} = \sigma(D_{i,s}, s \leq t)$, $i = 1, \dots, n$, $\mathcal{H}_t = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{H}_{i,t}$
 - filtration naturelle des temps de défaut
 - Temps de défaut ordonnés : τ^1, \dots, τ^n
 - **Pas de défauts simultanés** : $\tau^1 < \dots < \tau^n - \mathbb{P}$ p.s.
- $\alpha_i^{\mathbb{P}}$, $i = 1, \dots, n$ ($\mathbb{P}, \mathcal{H}_t$)–intensités des temps de défaut
 - $D_i(t) - \int_0^t \alpha_i^{\mathbb{P}}(s) 1_{\{\tau_i > s\}} ds$, $i = 1, \dots, n$ ($\mathbb{P}, \mathcal{H}_t$)–martingales

Hypothèses de marché

- **CDS digitaux instantanés** cotés sur chaque sous-jacent du portefeuille
- Qu'est ce qu'un CDS digital instantané sur le nom i ?



- Cash-flow en $t + dt$: $dD_i(t) - \alpha_i(t)dt$
- **Pas de risque de spread spécifique** : les primes de CDS, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, sont supposées être des processus prévisibles par rapport à la filtration \mathcal{H}_t (cadre de [Bielecki, Jeanblanc et Rutkowski \(2007\)](#))

Probabilité risque neutre

- Par absence d'opportunité d'arbitrage, on a :

$$\{\alpha_i(t) > 0\} \stackrel{\mathbb{P}\text{-p.s.}}{=} \{\alpha_i^{\mathbb{P}}(t) > 0\}, i = 1, \dots, n$$

- Sous certaines hypothèses de régularité, il existe une unique probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} telle que, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient les $(\mathbb{Q}, \mathcal{H}_t)$ -intensités des temps de défaut

Couverture et théorème de représentation de martingales

- On cherche à couvrir un actif risqué M , \mathcal{H}_T -mesurable, \mathbb{Q} -intégrable
- Théorème de **représentation de martingale** : il existe des processus \mathcal{H}_t -prévisible, $\theta_1, \dots, \theta_n$ tels que :

$$M = E^{\mathbb{Q}}[M] + \sum_{i=1}^n \int_0^T \theta_i(t) (dD_i(t) - \alpha_i(t) 1_{\{\tau_i > t\}} dt)$$

- Réplication de M en investissant initialement $E^{\mathbb{Q}}[Me^{-rT}]$ dans l'actif sans risque et en prenant en t , sur la période $[t, t + dt]$, une position sur les CDS instantanés des noms survivants
 - Pour le nom i par exemple, prise de position en t sur $\theta_i(t)e^{-r(T-t)}$ CDS instantané relatif au nom i
 - Gain potentiel épargné en $t + dt$ au taux r
 - Perte potentielle empruntée en $t + dt$ au taux r
- **Coût de la réplication** en t : $V_t = E^{\mathbb{Q}}[Me^{-r(T-t)} | \mathcal{H}_t]$

Modèles de contagion markoviens homogènes

- Nécessité d'hypothèses supplémentaires pour le **calcul effectif des stratégies de couverture**
 - **Cadre markovien** : les spreads dépendent uniquement de l'état courant des défauts
 - **Approche mean-field** : les spreads dépendent uniquement du nombre de défauts courants
 - **Homogénéité du portefeuille** : les spreads des noms survivants sont les mêmes

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = \alpha(t, N(t)), & i = 1, \dots, n \\ N(t) = \sum_{i=1}^n D_i(t) \end{cases}$$

Modèles de contagion markoviens homogènes

- Pas de défauts simultanés : l'intensité λ de $N(t)$ est simplement la somme des intensités individuelles des noms survivants :

$$\lambda(t, N(t)) = (n - N(t)) \alpha(t, N(t))$$

- $N(t)$ est alors une chaîne de Markov à temps continu de matrice génératrice :

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t, 0) & \lambda(t, 0) & 0 & & 0 \\ 0 & -\lambda(t, 1) & \lambda(t, 1) & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda(t, n-1) & \lambda(t, n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

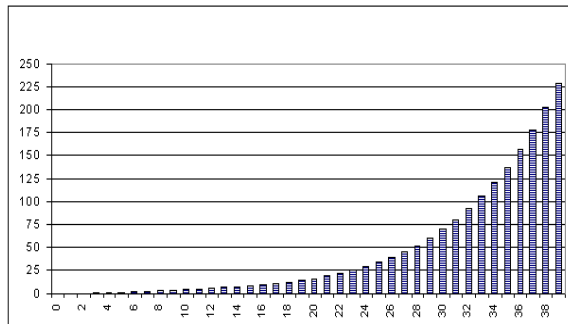
Modèles de contagion markoviens homogènes

- Prix de réplication d'une tranche de CDO : $V_t = V_{CDO}(t, N(t))$
 - Depend seulement du nombre de défauts
 - et des caractéristiques de la tranche
- Grâce à l'homogénéité entre les noms :
 - Tous les ratios de couverture par rapport aux CDS individuels sont les mêmes
 - Couverture avec l'indice CDS et l'actif sans risque
- Ratio de couverture :

$$\delta(t, N(t)) = \frac{V_{CDO}(t, N(t) + 1) - V_{CDO}(t, N(t))}{V_{Index}(t, N(t) + 1) - V_{Index}(t, N(t))}$$

Résultats et remarques

- **Couverture des tranches de CDO sur indice iTraxx** : $n = 125$ références, taux d'intérêt $r = 3\%$, taux de recouvrement $R = 40\%$, maturité $T = 5$ ans
- Intensité homogène en temps : $\lambda(t, k) = \lambda(k)$, $k = 0, \dots, 125$
- Calibration des $\lambda(k)$, $k = 0, \dots, 125$ à partir de données de marché :



Résultats et remarques

- Dynamique des **spreads d'indice** en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	Weeks			
	0	14	56	84
0	20	19	17	16
1	0	31	23	20
2	0	95	57	43
3	0	269	150	98
4	0	592	361	228
5	0	1022	723	490
6	0	1466	1193	905
7	0	1870	1680	1420
8	0	2243	2126	1945
9	0	2623	2534	2423
10	0	3035	2939	2859

Résultats et remarques

- Dynamique des **deltas tranche equity [0, 3%]** en fonction du nombre de défauts :

Nb Defaults	OutStanding Nominal	Weeks			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.541	0.617	0.823	0.910
1	2.52%	0	0.279	0.510	0.690
2	2.04%	0	0.072	0.166	0.304
3	1.56%	0	0.016	0.034	0.072
4	1.08%	0	0.004	0.006	0.012
5	0.60%	0	0.002	0.002	0.002
6	0.12%	0	0.001	0.000	0.000
7	0.00%	0	0	0	0

Résultats et remarques

- Dynamique des **deltas tranche mezzanine [3%, 6%]** en fonction du nombre de défauts :

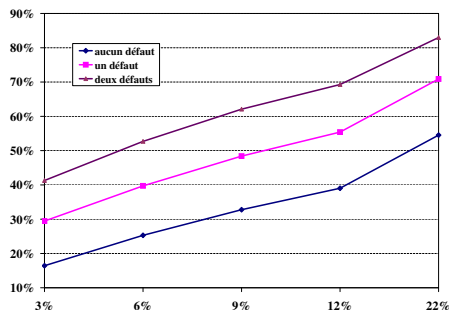
Nb Defaults	OutStanding Nominal	Weeks			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.139	0.134	0.096	0.060
1	3.00%	0	0.168	0.197	0.179
2	3.00%	0	0.118	0.197	0.268
3	3.00%	0	0.061	0.111	0.187
4	3.00%	0	0.029	0.049	0.085
5	3.00%	0	0.016	0.021	0.034
6	3.00%	0	0.016	0.012	0.014
7	2.64%	0	0.022	0.011	0.008
8	2.16%	0	0.031	0.014	0.007
9	1.68%	0	0.031	0.020	0.010
10	1.20%	0	0.023	0.021	0.013
11	0.72%	0	0.014	0.014	0.012
12	0.24%	0	0.005	0.005	0.005
13	0.00%	0	0	0	0

Résultats et remarques

- Comparaison entre deltas trader (salle de marché) et deltas de réplication :

	[0-3%]	[3-6%]	[6-9%]	[9-12%]	[12-22%]
market deltas	27	4.5	1.25	0.6	0.25
model deltas	21.5	4.63	1.63	0.9	0.6

- Différences expliquées par le phénomène de contagion



Synthèse

- Sous certaines hypothèses :
 - Pas de défauts simultanés
 - Risque de spread gouverné par le risque de défaut
- **Marché complet** : couverture de tranches de CDO avec des CDS digitaux instantanés associés aux références du portefeuille sous-jacent
- Sous des hypothèses un peu plus restrictives :
 - Cadre markovien
 - Homogénéité du portefeuille de crédit
- Il est possible de dupliquer parfaitement des tranches de CDO avec l'indice et l'actif sans risque
- Détermination simple et rapide des stratégies de duplication dynamiques